Большая перемена

Э.Н. Балаян

800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ

9–11 классы

Большая перемена

Э.Н. Балаян

800 ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

9–11 классы

Ростов-на-Дону
Феникс
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ : 9–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2013. — 317, [2] с. — (Большая перемена)

ISBN 978-5-222-20106-0

В предлагаемом пособии рассмотрены различные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня трудности для учащихся 9–11 классов.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, геометрические задачи и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения, причем некоторые задачи решены различными способами. Большинство задач авторские, отмечены значком (А).

Пособие предназначено прежде всего старшеклассникам общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам различного уровня, а также к ЕГЭ, студентам — будущим учителям, работникам центров дополнительного образования, и всем любителям математики.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-20106-0 ББК 22.1я721

Предисловие

Роль олимпиад с каждым годом становится все более значимой. И не случайно многие вузы стали проводить свои олимпиады для будущих абитуриентов, преследуя цель — привлечь школьников в данный вуз. Победителей, занявших призовые места, освобождали от сдачи экзаменов и зачисляли в вуз.

В связи с этим, назрела необходимость в доступной форме ознакомить широкие массы школьников с характером и типом задач, предлагаемых на олимпиадах.

Обычно традиционные олимпиады проходят в пять туров: школьный, районный (городской), областной (республиканский, краевой), зональный (окружной) и всероссийский.

В книге представлены задачи разного уровня трудности, причем сделано это сознательно с тем, чтобы каждый участник мог что-то решить, ибо если задачи слишком трудны, то дети теряют интерес не только к олимпиаде, но и к изучению математики.

Как правило, олимпиадная задача — это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения. Среди предложенных задач встречаются как нетривиальные, для решения которых требуются необычные идеи и специальные методы, так и более стандартные, которые могут быть решены оригинальным способом. К числу таких методов можно отнести делимость и остатки, признаки делимости чисел, решение уравнений в целых числах, метод инвариантов, принцип Дирихле, задачи на проценты, логического характера и др.

Эти задачи способствуют резкой активизации мыслительной деятельности, умственной активности, дают возможность самостоятельно составлять подобные, а возможно, и более оригинальные задачи, что в итоге приводит со временем к творческим открытиям в различных областях математики.

Автор старался привести наиболее рациональные и изящные решения, доступные школьникам 9–11 классов. Разумеется, читатель может привести и другие, возможно, более изящные решения, за что автор будет весьма признателен.

Книга состоит из двух разделов. В первом приводятся условия задач для 9–11 классов.

Задачи, отмеченные значком (А), авторские, составленные на протяжении многих лет педагогической деятельности.

Во втором разделе книги приводятся ответы, краткие указания, а к наиболее трудным — решения. Автор настоятельно рекомендует обращаться к решениям в случае, когда задача уже решена, или после неоднократных, но безуспешных попыток самостоятельно ее решить. Надо иметь в виду, что одна самостоятельно решенная задача принесет значительно больше пользы для развития ума, чем несколько других, прочитанных в книге. Только настойчивость, терпение и выдержка помогут вам преодолеть трудности, и вас непременно ожидает успех.

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

9 класс

1. Может ли число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ оканчиваться цифрой 7?

2. Сравнить 80^{13} и 10^{28}.

3. Найти условие делимости $(x + 1)^n + (x - 1)^n$ на x, где $n \in N$.

4(А). Делится ли $2^{54} + 1$ на $2^{27} + 2^{14} + 1$?

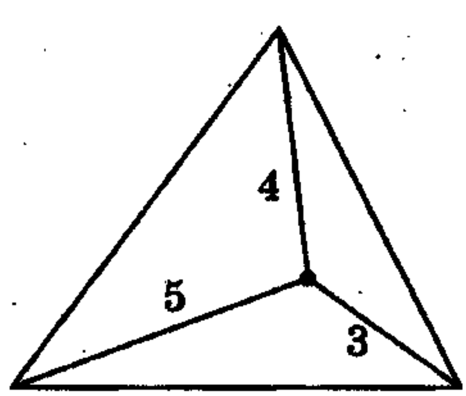
5. Доказать, что если $x > 0$, то $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \dfrac{x}{3}$.

6. Разложить на множители $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.

7(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то
$2(a^5 + b^5 + c^5) = 25a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4)$.

8. Доказать, что для любого натурального n найдется такое число a, что число $an + 4$ составное.

9(А). Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}$.



10. Точка, взятая внутри правильного треугольника, удалена от его вершин на расстояния 3, 4, 5 единиц. Чему равна сторона треугольника?

11(А). Можно ли разложить 1000 орехов в 7 корзин, расставленных по кругу так, чтобы в любых двух корзинах число орехов отличалось на 1?

12(А). Упростить выражение $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$.

13. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

14. В выпуклом пятиугольнике $MNKPE$ углы MNK и KPE равны 30°, а каждая из сторон NK, KP и ME равна 1 и сумма длин сторон MN и PE равна 1. Доказать, что площадь $MNKPE$ равна 1.

15(А). Решить уравнение
$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.

16(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases}(x+y)^5-x^5-y^5=-30,\\(x+y)^3-x^3-y^3=-6.\end{cases}$$

17(А). Доказать, что не существует целых чисел a, b и c, таких, что выражение ax^2+bx+c равно 2 при $x=13$ и 3 при $x=60$.

18(А). Решить уравнение $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=20$.

19(А). Как разрезать прямоугольник со сторонами 10 и 33 см на три подобных прямоугольника, среди которых нет равных?

20(А). В ΔABC $\angle A=60°$, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Найти $\angle B$.

21. Доказать, что если a и b — катеты, а c — гипотенуза, то $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где r — радиус вписанной окружности.

22(А). Доказать, что выражение
$$(5x + 7y)^3 + (7x + 5y)^3$$
делится без остатка на $12(x + y)$.

23. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 423. Определите номер дома, пятого от угла квартала.

24(А). Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2 см больше стороны AB, $AC = 5$ см. Найти AB и BC.

25. Разложить многочлен $x^3 + y^3 + 3xy - 1$ на множители.

26. Разложить многочлен $a^3(b - c) + c^3(a - b) - b^3(a - c)$ на множители.

27(А). В ΔABC $\sin \angle C = \frac{3}{5}$, $AC = 5$, $BC = 4$. Найти радиус вписанной окружности, если $AB < AC$.

28(А). При каких значениях x значение выражения $\frac{x^2 - 3}{(x-4)^2}$ будет равно $\frac{a^2 - 3}{(a-4)^2}$?

29(А). Решить уравнение $4x^2 + \frac{10}{3x} = \frac{61}{9}$.

30(А). На графике функции $y = |5x - 3|$ найти точку, ближайшую к точке $A(2; 0)$.

31(А). Решить уравнение
$$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{2-x} + 1) = 2(x - 1).$$

32(А). Доказать, что $333^{777}+777^{333}$ делится на 10.

33. Решить уравнение $\sqrt[6]{\frac{1}{2}-\cos x}+\sqrt[6]{\frac{1}{2}+x}=1.$

34(А). Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}}=\frac{1}{5-2x}.$$

35(А). В классе из 30 учащихся получили на контрольной оценки «5», «4», «3», «2». Сумма полученных оценок равна 90, причем «троек» было больше, чем «пятерок» и «четверок». Кроме этого, известно, что число «четверок» кратно 5, а число «троек» кратно 7. Сколько и каких оценок получил класс?

36(А). Упростить выражение $\left(\frac{27^x-3^x}{9^x+3^x}\right)^2+3^{1+x}.$

37. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x^2-8xy+4y^2=0,\\ x^2+y^2+13(x-y)=0.\end{cases}$$

38. Стороны одного треугольника 17; 25 и 26 см, а две стороны другого 17; 25 и 26 см. Найти длину третьей стороны, если у треугольников равны радиусы вписанной окружностей.

39(А). Сократить дробь $\frac{x+4-5\sqrt{x-2}}{x-3\sqrt{x-2}}.$

40(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x^2+y^2)xy=30,\\ x^4+y^4=82.\end{cases}$$

41(А). В ΔABC стороны a, b, c $(a<b<c)$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что

$R \cdot r = 130$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Найти наименьшую целую тройку (a, b, c).

42. Найти все простые числа p, такие, что $14p^2 + 1$ — также простые.

43(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 17(x^2 + y^2), \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

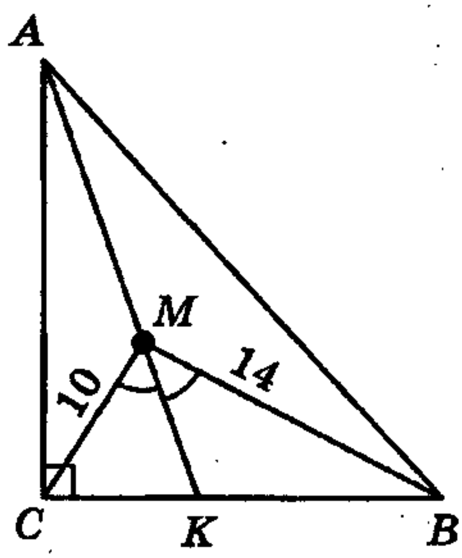
44(А). Доказать, что $\left(1 + \dfrac{7}{\sin x}\right)\left(1 + \dfrac{19}{\cos x}\right) > 293$, если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

45(А). Решить в натуральных числах уравнение $x^3 - 8y^3 = 19$.

46. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ y^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ z^3 + xyz = \sqrt{xyz}. \end{cases}$

47(А). Заменить буквы цифрами так, чтобы равенство БЕСЫ = (Б + Е + С + Ы)^4 оказалось верным.

48(А). В ΔABC ($\angle C = 90°$) найти AB и AC по данным, приведенным на рисунке, если $BC = 18$.



49. Доказать неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$, где $a, b, c > 0$.

50(А). В 46 клетках находятся 1000 кроликов. Доказать, что в каких-то двух клетках находится поровну кроликов (могут быть пустые клетки).

51(А). Найти площадь круга, вписанного в трапецию, площадь которой 125 м^2, если расстояние между точками касания боковых сторон равно 8 см.

52. Доказать, что если в арифметической прогрессии $S_m = S_n = 0$, то $S_{m+n} = 0$.

53(А). Доказать, что $35 \sin^2 x \geq 6 \sin 2x - 1$.

54(А). Решить уравнение

$$\sqrt{2x+14+8\sqrt{2x-2}} + \sqrt{2x+2-4\sqrt{2x-2}} = 6.$$

55. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовать геометрическую прогрессию?

56(А). Решить уравнение $(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$.

57(А). Решить уравнение $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geq 1$.

58(А). Вычислить $1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + 996^2 - 995^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

59(А). В трапеции диагональ $KLMT$ $LM \parallel KT$, $KL = MT$, диагональ $MK = 8$ м и $\angle MKT = 75°$. Найти площадь трапеции.

60(А). Решить уравнение $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$.

61. Доказать неравенство $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ при $a \geq 0, b \geq 0$.

62(А). Сумма нескольких последовательных четных чисел равна 100. Найти эти числа.

63. Найти арифметическую прогрессию, если сумма ее n членов равна $2n^2 - 3n$.

64. Чему равен $\angle C$ ΔABC, если $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$?

65(А). В ΔABC $BC = 14$, BD — медиана, $\angle ABD = 45°$, $\angle CBD = 30°$. Найти AB и BD.

66(А). Решить уравнение $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$.

67(А). Доказать, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} < 0{,}999.$$

68(А). Сколько существует двузначных чисел, делящихся на произведение своих цифр?

69. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

70. Известно, что $a + b + c$ делится на 6, где a, b, c — целые числа. Доказать, что $a^5 + b^3 + c$ также делится на 6.

71(А). Сумма цифр трехзначного числа равна 17. Если из исходного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 792. Найти трехзначное число.

72(А). Найти хотя бы одну пару целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^5$.

73. Известно, что уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет 3 действительных корня. Доказать, что $p \leq 0$.

74(А). Стороны параллелограмма равны 11 и 23 м, а диагонали относятся как 2 : 3. Найти длины диагоналей.

75(А). В прямоугольнике со сторонами 20 и 25 расположено 120 квадратиков со стороной 1. Доказать, что внутри прямоугольника можно поместить круг диаметра 1, не налегающий ни на один из квадратиков.

76(А). Решить уравнение $3\sqrt{x-2} - \frac{1}{9}x^2 = 2$.

77(А). Найти расстояние между осью параболы $y = -x^2 - 7x + 2$ и осью Oy.

78. Доказать, что при всех целых n выражение $n(n^4 - 125n^2 + 4)$ кратно 120.

79(А). Доказать, что если x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $x^2 + 2ax - \frac{1}{8a^2} = 0$, где $a \in R$, то $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

80(А). При каком значении m график функции $y = 2x^2 - 3x + 17 + m$ имеет одну общую точку с осью Ox?

81(А). Решить уравнение $\frac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2$.

82(А). Две стороны остроугольного треугольника равны соответственно 13 и 20 см. Радиус описанного около треугольника круга $\frac{65}{6}$ см. Найти третью сторону треугольника.

83. Цена товара со 100 000 рублей дважды понижалась, каждый раз на 30%. Какова окончательная цена товара?

84(А). Решить уравнение $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12x}$.

85. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в $15°$ произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы.

86(А). При каких значениях a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$?

87(А). Решить уравнение

$$16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x+13}.$$

88(А). Сумма двух чисел равна 1338. Найти эти числа, если известно, что они станут равными друг другу, если в конце первого числа приписать цифру 2, а в конце второго числа отбросить цифру 5.

89(А). Является ли число $5\frac{2}{3}$ членом последовательности, заданной формулой $a_n = 2n - 1\frac{(-1)^{n+1}}{n}$?

90(А). Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найти $\frac{R}{r}$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

91. Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то разность ее равна радиусу вписанного круга.

92(А). Решить неравенство $\left|\frac{2x-5}{x+1}\right| \geq 1$.

93(А). Величина одного из углов остроугольного треугольника равна $30°$. Доказать, что площадь треугольника равна $r(R + (2 + \sqrt{3})r)$, где r и

R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

94(А). Найти сумму тангенсов острых углов прямоугольного треугольника, если радиус описанной окружности относится к радиусу вписанной как 5 : 2.

95(А). Найти наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3}<0$.

96(А). Доказать, что если $a^3+7a+19=0$, $b^3+7b+19=0$, $c^3+7c+19=0$, где $a\neq b$, $b\neq c$, $a\neq c$, то $a+b+c=0$.

97(А). От данной трапеции отрезать треугольник, площадь которого составляет $\dfrac{2}{3}$ ее площади.

98. Вычислить без таблиц $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

99(А). Исключив x и y из равенств $x-y=a$, $x^3-y^3=b$, $x^5-y^5=c$, найти зависимость между a, b и c.

100(А). Решить уравнение

$$\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2.$$

101(А). Решить уравнение

$$\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x.$$

102. Найти зависимость между a, b и c, если $a=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $b=x+y$, $c=x^2+y^2$.

103(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y+3=(4-x)^2, \\ (y+5)^2=z(2y+7), \\ x^2+z^2=6x, \quad \text{если } z\geq 0. \end{cases}$$

104(А). Решить уравнение $1+4+7+\ldots+x=117$.

105(А). Решить неравенство

$$\sqrt{1-4x+4x^2} \leq \frac{x^2-2x-3}{x-3}.$$

106(А). Решить уравнение

$$\sqrt{8x-7}+\sqrt{3x-8}=\sqrt{7x-3}+\sqrt{2x-4}.$$

107(А). Доказать, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в $15°$ составляет восьмую часть квадрата гипотенузы.

108(А). Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-\frac{6x^2}{|x|}+\frac{3}{\operatorname{tg}^2 30°}} < \frac{1}{2}\sin^2 30°.$$

109(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+5y^2-4xy+2x-8y+5=0, \\ x^3+y^3+xy=41. \end{cases}$$

110(А). Найти четырехзначное число, которое в 9 раз меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

111(А). Решить неравенство

$$\left|\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}\right| > 0{,}4\cdot 2\frac{1}{2}+5|x|^0-\frac{x^{2k+1}}{x^{2k}}.$$

112(А). При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3-12x+ax-28=0$ образуют арифметическую прогрессию?

113(А). Чему равно значение выражения

$a^{2010} + \dfrac{1}{a^{2010}}$, если $a^2 + a + 1 = 0$?

114(А). Решить неравенство

$$\sqrt{9x^2 - 6x + x^0} > \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

115(А). При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 48x - 27 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

116(А). Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} + \frac{x^{2k-1}}{x^{k-1}} - x^k - 2x^0.$$

117(А). Решить неравенство $\dfrac{x}{|x|} \geq \sqrt{9 - x^2}$.

118(А). В равнобедренном остроугольном ΔABC основание $AC = 24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найти радиус окружности, вписанной в ΔABC.

119(А). Решить уравнение

$$\cos 2010° + \cos 30° + \operatorname{tg} 30° \cdot \frac{3}{|x|} = \sqrt{x^2} - 3 \sin 30°.$$

120(А). Решить неравенство

$$\left|\frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}\right| > |3x|^0 + 2{,}4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} - \frac{x^{n+2}}{x^n}.$$

121(А). Центр окружности, касающийся катетов прямоугольного треугольника, лежит на гипотенузе. Найти радиус окружности, если он в 7 раз меньше суммы катетов, а площадь треугольника равна 56.

122(А). Решить уравнение

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 6} + 2\sqrt{(x - 2)(x + 6)} = 2(8 - x).$$

123(А). Решить неравенство
$$\frac{x^7 \cdot \mathrm{tg}\,189^\circ \cdot \sin 180^\circ}{\mathrm{tg}\,9^\circ} + \mathrm{ctg}\,45^\circ + \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq 5.$$

124(А). Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равны соответственно 6 и 8. Найти площадь треугольника.

125(А). Решить систему неравенств
$$\begin{cases} |x-2| \geq 3, \\ \left|\dfrac{x-1}{x}\right| < 1. \end{cases}$$

126(А). При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

127(А). Точка M лежит внутри правильного ΔABC. Найти площадь треугольника, если $AM = BM = 2$ см, $CM = 1$ см.

128(А). Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \geq 4.$

129(А). При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (6+a)x + 2y = 3 + a, \\ -4x + ay = 1 + a \end{cases}$ не имеет решений?

130(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то
$50(a^7 + b^7 + c^7) = 49(a^4 + b^4 + c^4)(a^5 + b^5 + c^5)^2.$

131(А). Существует ли треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 13$?

132(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(x+1)(2x^2-3y^2)=12, \\ 2x+4x^2-3y^2=14. \end{cases}$$

133. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего ΔABC, взята произвольная точка M. Отрезки AM и BC пересекаются в точке N. Доказать, что $\dfrac{1}{MN}=\dfrac{1}{BM}+\dfrac{1}{CM}$.

134(А). Построить график функции

$$y=\frac{2|x|}{x}\sqrt{4-x}.$$

135(А). Найти уравнение общей касательной к параболам $y=x^2-6x+8$ и $y=x^2+x+2$.

136(А). Сколькими нулями оканчивается число 2010? Четна или нечетна его последняя ненулевая цифра?

137(А). Решить уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3x}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

138(А). При каком значении m корни уравнения $x^4-(3m-5)x^2+(m+1)^2=0$ составляют арифметическую прогрессию?

139(А). Существует ли квадратный трехчлен $y(x)$ с целыми коэффициентами, который в точке $x=1$ принимает нечетное значение, а в точке $x=3$ — четное?

140(А). Решить неравенство

$$\frac{x^{0,4}\cdot x^{1\frac{3}{5}}+4\operatorname{ctg}4^\circ\operatorname{ctg}94^\circ}{|x|-2}\ge x^2.$$

141(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

142(А). В ΔABC длины сторон образуют арифметическую прогрессию, причем $BC < AC < AB$. Известно, что $\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Найти $\angle B$.

143(А). Найти наименьшее 4-значное число, удовлетворяющее соотношению $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{ab} + \overline{cd}$.

144(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65. \end{cases}$$

145(А). Решить уравнение $\cos x + \cos 7x = 2$.

146(А). Найти площадь треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, если известно, что произведение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 130.

147(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ 3x^2y - y^3 = 1. \end{cases}$$

148(А). Доказать, что $19^{2010} - 1$ делится на 5.

149. Доказать, что площадь равнобедренной трапеции определяется по формуле $S = \frac{1}{2}m^2 \sin\alpha$, где m — длина диагонали, α — угол между ними.

150. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = xyz, \\ y + z = xyz, \\ z + x = xyz. \end{cases}$

151. Числа a, b, c такие, что $(a + b + c) \cdot c < 0$. Доказать, что $b^2 > 4ac$.

152(А). Найти сумму целых чисел из области определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}$.

153(А). Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, а сумма квадратов этих чисел — 364.

154(А). Решить уравнение $(x - 1)^2 - x^3 = 17$.

155(А). Решить неравенство $\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3} < 0$.

156(А). Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, стоящих на нечетных местах, равна 36, а на четных местах — 12. Найти эту прогрессию.

157(А). Доказать, что уравнение $xy = 2010(x + y)$ имеет решение в целых числах.

158(А). Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4$.

159(А). Решить уравнение

$$4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3(\sin x + \cos x).$$

160(А). Известно, что $a + b + c = 12$, $ab + ac + bc = 72$. Найти значение $a^2 + b^2 + c^2$.

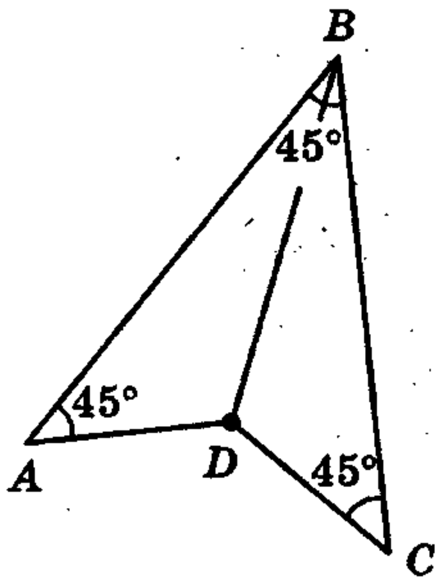
161. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой. Потом из бака вылили столько же литров смеси. После этого в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй, если вместимость бака 64 л?

162(А). Решить уравнение

$$\frac{x^2}{|x|}(4-x)+(1-|x|)(1+|x|)=3.$$

163(А). В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A=\angle B=\angle C=45°$.

Доказать, что $S_{ABCD}=\frac{1}{2}BD^2$.



164(А). Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 10, а в остатке — некоторое число. Если же это число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, опять разделить на произведение его цифр, то в частном получится 2, а в остатке — то же число.

165(А). Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}=\sin x+\sqrt{x-3}.$$

166(А). Решить в целых числах уравнение

$$x^3-x=2013.$$

167. Сколько можно провести различных прямых линий, соединяя попарно n точек на плоскости, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой?

168. Разложить многочлен $x^{13}+x^{11}+1$ на два множителя.

169(А). Решить неравенство

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(x+2012)(x+2013)}\le 0.$$

170(А). Периметр прямоугольного треугольника равен 12 см. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

171(А). Представить многочлен $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой.

172(А). Решить уравнение $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ \ldots = 16$.

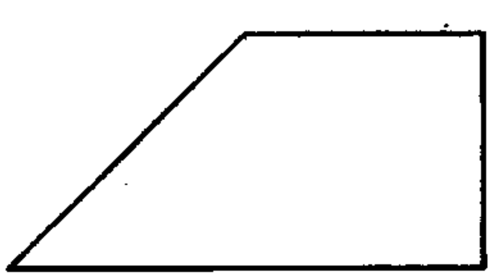
173(А). Решить уравнение $\cos x + \cos\frac{3x}{4} = 2$.

174(А). При каких значениях a и b многочлен $M(x) = ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ делится на $x^2 - 5x + 6$ без остатка?

175(А). Решить в натуральных числах уравнение $\sqrt{3x+2\sqrt{2}} + \sqrt{3x-2\sqrt{2}} = \sqrt{8y}$.

176(А). Решить неравенство $|x + 1| - |x - 2| < 3$.

177(А). Из трех различных цифр x, y, z образованы всевозможные трехзначные числа. Сумма этих чисел в три раза больше трехзначного числа, каждая цифра которого есть x. Найти цифры x, y, z.



178. Разделить данную трапецию на 9 равных и подобных заданной.

179(А). При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x+(a-1)y=a+3, \\ (a+2)x+2ay=6a+8 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

180(А). Решить уравнение $(x^2-x-2)^2-x^3=10$.

181(А). В 9 «А» классе присутствуют учитель и несколько учеников. Сколько учеников в классе, если известно, что возраст учителя на 40 лет больше среднего возраста учеников и на 36 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе?

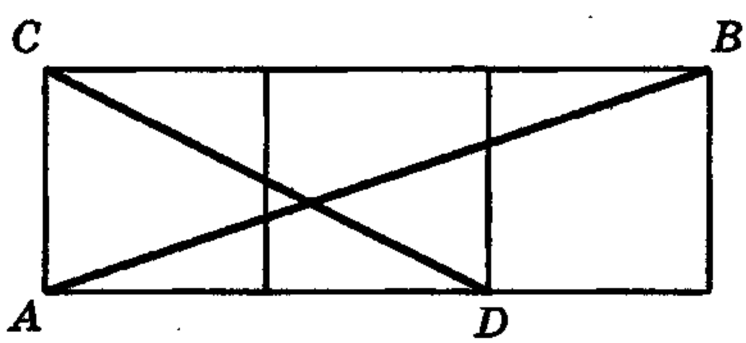
182(А). Решить уравнение $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{7}{8}$.

183. Через сколько минут после того, как часы показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую?

184(А). Найти пятизначное число, которое в 45 раз больше произведения своих цифр?

185(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3+8y^3=27, \\ x^2+4y^2=9. \end{cases}$

186. Три квадрата расположены, как показано на рисунке. Найти величину угла между прямыми AB и CD.



187(А). Часы отстают каждые сутки на 5 мин. Через сколько дней они опять будут показывать верное время?

188(А). Решить уравнение
$$4x = (\sqrt{x} + 39)(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})^2.$$

189. Внутри произвольного треугольника взяты две точки так, что расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 2; 4 и 16, а от другой (в том же порядке) – 5; 6 и 12. Найти радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

190(А). Решить в целых числах уравнение $5(x^2 + y^2) = 5 + 8xy$.

191(А). Решить уравнение $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4}{3}\right) = 1.$

192(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 - xy + 3y - 2x + 2 = 0, \\ y = \left(\dfrac{x^2+1}{5}\right)^4. \end{cases}$$

193(А). Сократить дробь $\dfrac{x+3-3\sqrt{x+1}}{x+1-2\sqrt{x+1}}$.

194(А). При каких значениях параметров m и n многочлен $2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n$ делится без остатка на $x^3 + x + 1$?

195(А). Решить уравнение $x^3 - 2x - 4\sqrt{6} = 0$.

196. Найти все решения в простых числах уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$.

197(А). На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найти углы треугольника.

198(А). Решить уравнение
$$(x^2 - 5x - 8)^3 = x^2(x^2 + x - 8).$$

199. В прямоугольном треугольнике сумма катетов больше гипотенузы, сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Что можно сказать о сумме кубов катетов и куба гипотенузы?

200(А). Решить уравнение

$$\frac{1}{6x^2-5x+1}+\frac{1}{2x^2-3x+1}=3x^2-4x.$$

201(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}xy+y^2, \\ y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{18}x^2. \end{cases}$$

202(А). Построить график функции

$$y=\left(\frac{4^3\cdot 2^4}{16^2\cdot 8}\right)\cdot x^{3n+2}\cdot x^{-3n}+(-1)^{2n+1}.$$

203(А). Решить уравнение

$$\sqrt{7}\,(y-2x)=x^2+y^2+\frac{35}{4}.$$

204(А). Решить уравнение

$$(3x-1)(\sqrt{x}+3x-1)=2x.$$

205(А). Решить уравнение $\sqrt{6-x}=(|x|+2x)^0$.

206(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=xy+61, \\ x^2+y^2=xy+13. \end{cases}$$

207(А). Доказать, что для корней трехчлена $x^2+px+\frac{1}{p^2}$, где $p\in R$, выполняется неравенство $x_1^8+x_2^8>11$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

208(А). Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{x^2+4x+4}{|x+2|}\le\frac{9x^2-24x+16}{|3x-4|}$.

209(А). Решить уравнение $x^2 - 4x\cos(xy) + 4 = 0$.

210(А). При каких значениях a и b многочлен $x^3 + 7x^2 + ax + b$ делится на $x^2 + x + 2013$?

211(А). Построить график функции

$$|y| = \frac{3x^0 - \operatorname{tg} 45^\circ}{x-1}.$$

212(А). При каком целом значении a уравнения $4x^2 - (2a + 1)x - 2 = 0$ и $7x^2 + (3a - 1)x - 44 = 0$ имеют общий корень?

213(А). На оси ординат найти точку, через которую проходят две взаимно перпендикулярные касательные к графику функции $y = x^2 - 4x + 7$.

214(А). Решить уравнение $1 + x^5 = 2(1 + x)^5$.

215(А). Решить уравнение

$$\sin 2010^\circ \cdot \sin 540^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \frac{x^0 x^2}{3|x|} = x^2 \cos 30^\circ.$$

216(А). Основание равнобедренного треугольника равно 12, а расстояние от вершины основания до точки пересечения биссектрис равно $3\sqrt{5}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

217(А). В треугольник вписана окружность. Прямые, соединяющие центр окружности с вершинами, делят треугольник на части с площадями 120; 104 и 112. Найти радиус вписанной окружности.

218(А). В равнобедренной трапеции острый угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. При каком значении α диагональ трапеции в 2 раза больше высоты?

219(А). Центр окружности, касающийся катетов прямоугольного треугольника, лежит на гипотенузе. Найти радиус окружностей, если он в 7 раз меньше суммы катетов, а площадь треугольника равна 56.

220(А). Найти целые корни уравнения

$$(x + 3)(x + 4)(x + 9)(x + 12) = 3x^2.$$

221(А). Доказать, что уравнение $x^5 - px^3 + 1 = 0$ при целом $p > 2$ не имеет рациональных корней.

222(А). В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) биссектрисы AE и CD пересекаются в точке 0. Известно, что $S_{\Delta ACE} = 24$, $S_{\Delta BOE} = 36$. Найти $S_{\Delta ABC}$.

223(А). Выражение $\dfrac{1-\sqrt{2x^2-5x+4}}{5x-2x^2-3}$ рассматривается только для целых значений x. При каком значении x это выражение имеет наибольшее значение?

224(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33y, \\ 8(x+y) = 3x^3y^2. \end{cases}$$

225(А). Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\dfrac{x+3a-4}{x+a} > 0$ выполняется для всех $x \in [1; 3]$.

226(А). Высота равнобедренной трапеции, равная 21, делит основание трапеции в отношении 1 : 9. Определить радиус описанного круга, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию.

227(А). Доказать, что при любом целом m выражение $\frac{m^3}{6}+\frac{3m^2}{2}+\frac{13m}{3}+4$ является целым числом.

228(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases}x^2+y^2-8x-12y+26=0,\\ \sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}+\sqrt{x^2+y^2+2x-14y+50}=5.\end{cases}$$

229(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases}10(y-x)=x^4+9,\\ \sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}.\end{cases}$$

230(А). Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найти R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

231(А). Решить уравнение
$$\frac{x^3-2}{x+2}-\frac{13x+4}{x^2-10}=x-3.$$

232(А). Найти значение выражения
$$\sqrt{x+24\sqrt{x-144}}-\sqrt{x-24\sqrt{x-144}}\text{ при } x=2010.$$

233(А). Доказать, что если $a^2b^2=a+b$, где $a>0$, $b>0$, то $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^3+a^2+1}{b^3+b^2+1}$.

234(А). Решить уравнение
$$(x-6)^2+(x-5)^3+(x-4)^4=2.$$

235(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases}x\sqrt{y^2-1}+y\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{x^2+y^2-2},\\ x^2+y^2=9.\end{cases}$$

236(А). Решить неравенство $7^n+8^n<9^n$, $n\in N$.

237(А). Решить уравнение

$$\sqrt{x^4+x^3-2x^2+2x-1}+\sqrt{3x^2-x^4-x^3}=$$
$$=\frac{1}{2}(3x^2-2x+3).$$

238(А). В треугольнике высота, равная 4, делит основание в соотношении 1 : 2. Найти основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен $\dfrac{18}{7+\sqrt{13}}$.

239(А). Представить многочлен $1+x^2+x^4+$ $+x^6+x^8+x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой степени.

240(А). Решить уравнение

$$\sqrt{4x^3+3x^2+2}+\sqrt{2x^2-4x^3+4x-1}=3x^2+3x+2.$$

241(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z=0, \\ 2x-y+\dfrac{5}{8}=2z. \end{cases}$$

242(А). Основания трапеции равны 4 и 16. В нее вписана и около нее описана окружность. Найти произведение радиусов вписанной и описанной окружностей.

243(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{5}{12z}\right)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{5z}{12}\right)=1, \\ 3x+2y^2+z^3=22. \end{cases}$$

244(А). В трапеции $ABCD$ основание $BC=\sqrt{3}$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E, причем $BE=1$, $AE=2$, $\angle BAC=\angle DAC$. Найти площадь трапеции.

245(А). Доказать, что выражение

$$\frac{1\cdot4\cdot6+2\cdot8\cdot12+3\cdot12\cdot18+\ldots}{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+3\cdot6\cdot9+\ldots}$$

является целым числом — квадратом.

246(А). Решить уравнение $x^3+6=7\sqrt[3]{7x-6}$.

247(А). В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 120°$. Найти сторону CD.

248(А). В ΔABC $AB = 7$, $AC = 20$, $BC = 15$. Окружность, вписанная в этот треугольник, касается его сторон в точке M, N и K. Найти $S_{\Delta MNK}$.

249(А). Решить уравнение

$$\cos 2010°\cdot\sin 360° - \text{tg}^2\, 60°\cdot\frac{x^0x^3}{|x|} = 6x\sin 30°.$$

250(А). Известно, что $x = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}$. Найти значение выражения $x^3 - 30x$.

251(А). Определить числа a и b так, чтобы многочлен $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ делился без остатка на многочлен $g(x) = x^2 - x + b$.

252(А). Пусть x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $x^2 - 12mx + n = 0$. Числа m, x_1, x_2, n — четыре последовательных числа геометрической прогрессии. Найти x_1 и x_2.

253(А). Доказать, что $\text{tg}\, 127°30' + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ есть целое число.

254(А). Решить уравнение $x + \dfrac{4}{x}(x-3)^3 = \sqrt{x} + 3$.

255. В равнобедренную трапецию вписан круг. Определить радиус этого круга, если боковая сторона делится точкой касания на отрезки длиной m и n.

256(А). В прямоугольном ΔABC из вершины прямого угла C опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AB. Из точки D опущены перпендикуляры DE и DF соответственно на катеты AC и BC. Доказать, что $r = r_1 + r_2$, где r, r_1 и r_2 — соответственно радиусы окружностей, вписанных в ΔABC, ΔAED и ΔDFB.

257. Разложить на множители

$$(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3.$$

258(А). Решить уравнение

$$14\sqrt{\frac{2x+7}{x+8}} - \frac{27}{2x+7} = 11.$$

259. Сократить дробь $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$.

260. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $r = \sqrt{S+R^2}$, где S — площадь, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

261(А). Освободиться от корня в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{11} - \sqrt[4]{8}}$.

262(А). Решить уравнение

$$\sqrt{23x^2 + 11x + 4} = 7x^2 + 7x + 4.$$

263(А). Решить уравнение

$$x^9 - 2013x^3 + \sqrt{2012} = 0.$$

264(А). Решить уравнение

$$\sqrt[2013]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[2013]{\frac{x+3}{5-x}} = 2.$$

265(А). Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}}-\frac{12}{7(7x+2)}=\frac{53}{28}.$$

266. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

267. Доказать, что если a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

268(А). Построить график функции $|y|y=\frac{2|x|}{x}$.

269(А). Решить уравнение

$$3x^2+2y^2+z^2-2xz+4x-8y+10=0.$$

270(А). Найти положительные корни уравнения $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-1}\cdot(\sqrt[3]{x}+1)=\sqrt[3]{3}$.

271(А). Решить уравнение $x^2+19x-x!=0$.

272(А). При каком значении a ось параболы $y=x^2+2ax+a^2+b$ имеет уравнение $x=-1$?

273(А). Решить уравнение

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\frac{205}{16}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

274(А). При каких целых x квадратный трехчлен x^2+2x-3 есть простое число?

275(А). Имеет ли решения в натуральных числах уравнение $x^2+y^7=z^2$?

276. *Дано:* b_1 и q. Найти произведение всех членов геометрической прогрессии от b_{k-2} до b_{k+4}.

277(А). Решить неравенство

$$\operatorname{tg}5\operatorname{ctg}(\pi-5)+x\sin30^\circ+\sqrt{(x-3)^2}<1.$$

278(А). Решить неравенство $(z-1)^{10} > (z-1)^9$.

279(А). Показать, что многочлен

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

есть квадрат трехчлена.

280(А). Найти наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{1+x} < \sqrt[3]{1-2x}$.

281(А). Два угла треугольника, прилежащих к одной стороне, равны 45° и 60°. Найти отношение R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

282(А). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - |x-6|}.$$

283(А). Упростить выражение $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$.

284. Число $\overline{aabb}$ — точный квадрат. Найти это число.

285. Доказать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии q_1, q_2, q_3, ..., то $\dfrac{S}{S-q_1} = \dfrac{q_1}{q_2}$.

286(А). Задача на вычисление числа сторон выпуклого многоугольника свелась к решению уравнения $x^2 - 131x - 333 = 0$. Есть ли смысл решать уравнение?

287. Может ли число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ оканчиваться цифрой 9?

288(А). В ромб, который разделяется диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг, радиус которого равен $\sqrt{3}$. Найти сторону ромба.

289. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

290. Диагонали параллелограмма разбивают его на 4 треугольника. Найти отношение площади каждого из них к площади параллелограмма.

291. Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 101, то получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Найти трехзначное число.

292. Диагонали прямоугольника уменьшили в 3 раза. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

293(А). Высота CD, стороны AC, AB и CB ΔABC составляют арифметическую прогрессию с разностью d. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что высота CD опущена на сторону AB.

294(А). Высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, пропорциональные числам 16 и 25. В каком отношении делит гипотенузу биссектриса прямого угла?

295(А). При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x^2 - ax + 45$ на $[-3; +\infty)$ равно 9?

296(А). На 500 рублей куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты таковы: арбуз, 1 штука — 50 рублей, яблоки, 1 штука — 10 рублей, сливы, 1 штука — 1 рубль. Сколько фруктов каждого вида было куплено?

297(А). Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$ на 63 при $n \in N$?

298(А). Мальчики из 9 «А» обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что рукопожатий было 78. Сколько мальчиков в классе?

299(А). Решить в целых числах уравнение
$$xy^2 - 7(x + y^2) = 1.$$

300(А). Найти пятизначное число, которое от перестановки всех цифр в обратном порядке увеличивается в 9 раз.

301(А). Доказать, что выражение $9 \cdot 3^{3n+1} - 8^{n+1}$ кратно 19 при любом целом неотрицательном n.

302(А). Доказать, что для любых чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ выполняется неравенство $a^6 + b^6 \leq \dfrac{a^9}{b^3} + \dfrac{b^9}{a^3}$.

303. Доказать тождество
$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}.$$

304(А). Доказать, что $13! - 11!$ кратно 31.

305. Доказать, что если корни уравнения
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
составляют арифметическую прогрессию, то один из корней равен $-\dfrac{b}{3a}$.

306. Медианы ΔABC пересекаются в точке O. Доказать, что $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$.

307. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что $f\left(\dfrac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\dfrac{c-a-b}{2a}\right) = 0$. Доказать, что $f(-1) \cdot f(1) = 0$.

289. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

290. Диагонали параллелограмма разбивают его на 4 треугольника. Найти отношение площади каждого из них к площади параллелограмма.

291. Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 101, то получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Найти трехзначное число.

292. Диагонали прямоугольника уменьшили в 3 раза. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

293(А). Высота CD, стороны AC, AB и CB ΔABC составляют арифметическую прогрессию с разностью d. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что высота CD опущена на сторону AB.

294(А). Высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, пропорциональные числам 16 и 25. В каком отношении делит гипотенузу биссектриса прямого угла?

295(А). При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x^2 - ax + 45$ на $[-3; +\infty)$ равно 9?

296(А). На 500 рублей куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты таковы: арбуз, 1 штука — 50 рублей, яблоки, 1 штука — 10 рублей, сливы, 1 штука — 1 рубль. Сколько фруктов каждого вида было куплено?

297(А). Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$ на 63 при $n \in N$?

298(А). Мальчики из 9 «А» обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что рукопожатий было 78. Сколько мальчиков в классе?

299(А). Решить в целых числах уравнение
$$xy^2 - 7(x + y^2) = 1.$$

300(А). Найти пятизначное число, которое от перестановки всех цифр в обратном порядке увеличивается в 9 раз.

301(А). Доказать, что выражение $9 \cdot 3^{3n+1} - 8^{n+1}$ кратно 19 при любом целом неотрицательном n.

302(А). Доказать, что для любых чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ выполняется неравенство $a^6 + b^6 \le \frac{a^9}{b^3} + \frac{b^9}{a^3}$.

303. Доказать тождество
$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha = \frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}.$$

304(А). Доказать, что $13! - 11!$ кратно 31.

305. Доказать, что если корни уравнения
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
составляют арифметическую прогрессию, то один из корней равен $-\frac{b}{3a}$.

306. Медианы ΔABC пересекаются в точке O. Доказать, что $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$.

307. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0$. Доказать, что $f(-1) \cdot f(1) = 0$.

10 класс

1(А). Чему равно значение выражения

$$\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} - \sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} \ ?$$

2. Каким должно быть число m, чтобы уравнения $x^3 + mx + 1 = 0$ и $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ имели общий корень?

3. Доказать, что число $\lg 2$ иррациональное.

4(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то

$$2(a^7 + b^7 + c^7) = 7abc(a^4 + b^4 + c^4).$$

5(А). Доказать, что число $4^7 + 7^{16}$ составное.

6(А). Доказать, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 400 точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя было больше 1.

7(А). Решить уравнение $x^2 - 13 = \sqrt{x+13}$.

8(А). Решить уравнение $(\sqrt[4]{125} - \sqrt[4]{0,2})^x = 51,2$, где $x \in Z$.

9. Доказать, что объем многогранника, описанного около шара радиуса R, равен $\frac{1}{3}RS$, где S — площадь поверхности многогранника.

10(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{4-x^2} + \sqrt{x^2-3} = 1$.

11(А). Разложить на множители выражение, не группируя члены $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$.

12(А). Решить уравнение

$$(\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x)^2 = 5 + \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right).$$

13. Найти двузначное число, обладающее тем свойством, что если сложить его с суммой кубов его цифр, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

14(А). Доказать, что если ab и $a + b$ делится на c, то $a^6 + b^6$ делится на c^3.

15(А). Решить уравнение

$$16^{\sin^2\frac{\pi x}{4}} + 16^{\cos^2\frac{\pi x}{4}} = \sqrt{61 + 6x - 3x^2}.$$

16(А). Доказать, что выражение $(9x + 4y)^5 + (4x + 9y)^5$ делится без остатка на $13(x + y)$.

17. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего ΔABC, взята произвольная точка M. Отрезки AM и BC пересекаются в точке K. Доказать, что $\dfrac{1}{MK} = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$.

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy = y^x, \\ x^3 = y^2. \end{cases}$

19. Разложить многочлен $(x + y)^5 - x^5 - y^5$ на множители.

20(А). Доказать, что если $7a + 13b = 47$, то верно неравенство $20(7a^2 + 13b^2) \geq 47^2$.

21. Решить уравнение $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

22(А). Сократить дробь $\dfrac{x^8 + x^4 + 1}{x^2 + x + 1}$.

23(А). Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2010}<\frac{1}{44}.$$

24. В арифметической прогрессии $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$.

Доказать, что $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

25(А). Упростить выражение $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

26(А). Существует ли треугольник, стороны и высота которого связаны соотношением $a>b>c>h$ и выражаются последовательными целыми числами, если высота h опущена на сторону b?

27(А). Сколькими нулями оканчивается число 2010! ? Четна или нечетна его ненулевая цифра?

28(А). Решить уравнение

$$(1+x)\sqrt{1+x}-(1-x)\sqrt{1-x}=x.$$

29(А). Решить уравнение $(\sqrt{12})^{2x}+5^x=13^x$.

30(А). В равнобедренном остроугольном ΔABC основание $AC=24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найти радиус окружности, вписанной в ΔABC.

31(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}xy+xy^3=6,\\ x+xy^2+xy^4=9.\end{cases}$$

32(А). Найти все натуральные числа m, при которых дробь $\frac{13m-1}{3m+5}$ равна целому числу.

33(А). Доказать равенство

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$$

34(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + x^4y^4 = 33, \\ x - xy + y = 1. \end{cases}$$

35(А). Решить уравнение $\cos x + \cos 7x = 2$.

36(А). Решить уравнение

$$(\sin 3x + \cos 3x)\sin 6x = \sqrt{2}.$$

37(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 19, \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 133, \\ xz = 4y^2. \end{cases}$$

38(А). В ΔABC длины сторон образуют арифметическую прогрессию, причем $BC < AC < AB$. Известно, что $r/R = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Найти величину $\angle B$.

39(А). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(2 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 5 = 0$ имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

40. Доказать неравенство

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a + b)^2$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$.

41(А). Решить в натуральных числах уравнение $193(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 1753(xy^3 + 1)$.

42(А). Для каждого значения параметра a решить уравнение $\sqrt{|x|+4} - \sqrt{|x|} = a$.

43(А). Решить уравнение $3^x - \sqrt[x+1]{8^x} = 36$.

44(А). В четырехзначном числе первая цифра совпадает с третьей, а вторая — с четвертой. Доказать, что это число кратно 101.

45(А). При каком значении параметра a уравнение $125 \cdot 25^{-x-\frac{3}{2}} - (2a+3) \cdot 5^{-x} + (3a+1)(2-a) = 0$ имеет один корень?

46(А). Решить уравнение $\sqrt[x]{9} - \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{4}$.

47(А). Что больше: 100^{100} или 101^{99}?

48. Доказать, что если $a > 1$, то $\lg a + \log_a 10 \geq 2$.

49(А). Известно, что $\log_{12} 27 = a$. Найти $\log_6 16$.

50(А). Может ли сумма нескольких последовательных целых чисел равняться 100?

51. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ y^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ z^3 + xyz = \sqrt{xyz}. \end{cases}$

52(А). Найти сумму $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)^2$.

53(А). Найти все пятизначные числа, обладающие тем свойством, что если приписать впереди этого числа некоторое однозначное число, а затем приписать в конце этого числа то же однозначное число, то отношение полученного большего числа к меньшему будет равно 3.

54(А). Решить уравнение
$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

55(А). Вычислить
$$12(13^{12}+13^{11}+13^{10}+\ldots+13^2+14)+1.$$

56(А). В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания.

57. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^y=9, \\ \sqrt[y]{324}=2x^2. \end{cases}$

58(А). Решить уравнение $x^x+x^{2-x}=x^2+1$.

59(А). Не решая уравнения $4x^2-\sqrt{85}\,x+5\frac{1}{4}=0$, вычислить разность кубов его корней.

60(А). Решить уравнение
$$\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{x+2}=4\sqrt[6]{(x+1)(x+2)}.$$

61(А). Какой многочлен при возведении в 3-ю степень дает многочлен $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+$ $+3x+1$?

62(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x+z}{6}=\dfrac{y+z}{7}, \\ (x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2=110. \end{cases}$$

63(А). Решить уравнение
$$\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$$

64(А). Решить уравнение $2013^x-2012^x=1$.

65(А). Найти натуральные числа, удовлетворяющие равенству $\overline{abc}(a+\overline{bc}) = a^3 + \overline{bc}^3$, где a, b, c — различные числа.

66(А). В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\sqrt{2x+a} = x - 2$.

67(А). Доказать (не пользуясь таблицами), что число 27^{2010} имеет меньше 3016 цифр.

68(А). Решить уравнение

$$(x^2 + x)^2 + |x^2 + x| - 2 = 0.$$

69(А). В уравнении $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = y$ освободиться от радикала.

70. Доказать, что если числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то справедливо равенство $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$.

71(А). Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3+1}}.$$

72(А). Доказать, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

73(А). Доказать тождество

$$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1.$$

74(А). Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Доказать, что построенное сечение — трапеция.

75(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy = 9(x - 2y), \\ x^2 - 3y^2 = 6(x - 2y). \end{cases}$$

76(А). Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $120°$. Найти отношение r/R, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

77(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11, \\ x^2+2xy+3y^2=17. \end{cases}$$

78(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2+y^2)xy=78, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$$

79. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 y=\dfrac{\cos x}{\sin y}, \\ 2\sin^2 y=\dfrac{\sin x}{\sin y}; \end{cases} \text{ где } x,\ y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

80(А). Трехзначное число оканчивается цифрой 5. Если эту цифру переставить на первое место и найти разность между исходным и полученным числом, то получится трехзначное число с одинаковыми цифрами. Найти это число.

81(А). Решить в натуральных числах уравнение $(16x-21)yz+16(x+z)=21$.

82(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x-1)=\sqrt{y}(y+5), \\ x-y=3. \end{cases}$$

83(А). Решить уравнение

$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=2.$$

84(А). Решить в целых числах уравнение

$$5(x^2+y^2-1)=8xy.$$

85(А). Решить уравнение

$$3x^3 + 10 = 17\sqrt[3]{\frac{17}{3}x - \frac{10}{3}}.$$

86(А). Делится ли $13^{13} + 13^{14} + 13^{15}$ на 61?

87(А). Решить в натуральных числах уравнение $5(x + y)^3 = 54(x^2 + y^2)$.

88(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + yx^2 - 18x - 8y + 81 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 14y + 50} + \sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 2y + 82} = 10. \end{cases}$$

89(А). Доказать, что на графике функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ есть точка, которая является центром симметрии графика.

90(А). Решить в целых числах уравнение

$$x^3 + xy + y^3 = 13.$$

91(А). В ΔABC $\sin \angle C = \dfrac{3}{5}$, $AC = 5$, $BC = 4$. Найти радиус вписанной окружности, если $AB < AC$.

92(А). Найти площадь равнобедренной трапеции, у которой длина диагонали равна 8 дм, а угол между диагоналями — 45°.

93(А). Решить уравнение $5^{\log_3(x-1)} - 3^{\log_5(x+1)} = 2$.

94(А). В трапеции $ABCD$ основание $BC = \sqrt{3}$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E, причем $BE = 1$, $AE = 2$, $\angle BAC = \angle DAC$. Найти площадь $ABCD$.

95(А). Решить уравнение

$$16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x + 13}.$$

96(А). Решить уравнение $\sin 9x + 2\cos 6x = 2$.

97(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $4(a^7 + b^7 + c^7) = 7abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

98(А). Решить уравнение $|x - 4| + |x - 3| = x - 7$.

99(А). Решить уравнение $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

100(А). Какое число стоит на 2010-м месте в последовательности 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... ?

101(А). Произведение числа 13 на некоторое четырехзначное число есть точный куб. Найти неизвестный множитель.

102. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{1}{2}\left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = |\cos ax|$ имеет решение?

103(А). Найти целочисленный треугольник Пифагора, площадь которого численно равна периметру.

104(А). Не решая уравнения $x^2 - \sqrt{13}\,x + 3 = 0$, найти значение $x_1^5 - x_2^5$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

105(А). Решить уравнение $\sin 3x = \dfrac{a}{3}\sin x$.

106(А). Решить уравнение $x^4 + 26x^2 - x + 182 = 0$.

107(А). Какие натуральные числа увеличиваются в 7 раз, если между цифрами единиц и десятков вставить нуль?

108(А). Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x)\sin 6x = \sqrt{2}.$$

109(А). В ΔABC $\angle A = 60°$, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Найти $\angle B$.

110(А). Около круга описан прямоугольный треугольник с острым углом 60° и прилежащим катетом длиной 6 дм. Найти площадь круга.

111(А). В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Длины боковых ребер равны 8; 9 и 10 см. Чему равен объем пирамиды?

112(А). Решить уравнение

$$\sin x + \sin^7 x - \sin 7x = 3.$$

113(А). Найти трехзначные числа, кратные 13, у которых сумма цифр также кратна 13.

114(А). При каком целом a множитель $x^{13} + x + 90$ делится на $x^2 - x - a$?

115(А). Решить уравнение

$$x^4 - (x-1)(5x^4 - 4x + 4) = 0.$$

116(А). В ΔABC длины сторон a, b, c и площадь S связаны соотношением $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$. Найти $\angle A$.

117(А). Найти наименьший положительный период T функции $y = \cos\dfrac{4x}{15} - 2\sin\dfrac{2x}{21} + \cos\dfrac{6x}{35}$.

118(А). Стороны одного треугольника 17; 25 и 26 см, а две стороны другого 17 и 25 см. Найти длину третьей стороны, если у треугольников равны радиусы вписанных окружностей.

119(А). Решить уравнение
$$x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x^3-3x^2}.$$

120(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$

121(А). Найти сумму $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots +$ $+\dfrac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2010}}.$

122(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$$

123(А). Доказать, что если $\sin x + \sin y = a$, $\cos x+\cos y=b$, то $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=\dfrac{(a^2+b^2+2b)(a^2+b^2-2b)}{(a^2+b^2+2a)(a^2+b^2-2a)}$.

124(А). При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 8|x| + 12| = a$ имеет ровно 8 корней?

125(А). Решить уравнение $|x^3 - 2x| = 2x + 15.$

126(А). Найти функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений
$$\begin{cases} f(3x-2)+7g(x-5)=x+1, \\ f(x+1)-g\left(\dfrac{x}{3}-4\right)=3x. \end{cases}$$

127(А). Построить график функции
$$y = \sqrt{\sin^4 x-3\cos 2x+6} + \sqrt{\cos^4 x+2\cos 2x+6}.$$

128(А). В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 12, а сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна 83/8. Найти стороны треугольника.

129(А). Решить уравнение $\frac{3}{\cos^2 x}+1=\frac{7\sin x}{|\cos x|}$.

130(А). Решить уравнение $\frac{1-2|\cos x|\cos x}{\sqrt{x(7-x)}}=0$.

131(А). Решить уравнение $\sin\frac{5x}{4}+\cos x=2$.

132(А). Решить неравенство

$\operatorname{ctg} 77^\circ\cdot\operatorname{ctg} 13^\circ+\sqrt{x^2\cos 60^\circ\sin 30^\circ}-x^2\sin^2 60^\circ\le 0$.

133(А). Решить уравнение $x^2-2=\sqrt{x+2}$.

134(А). Доказать, что если $7\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$, то $3\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4\operatorname{tg}\alpha$.

135(А). Решить неравенство

$\operatorname{tg} 5\operatorname{ctg}(\pi-5)+x\sin 30^\circ+\sqrt{(x-3)^2}<1$.

136. Разложить многочлен x^5+x+1 на два множителя.

137(А). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$$

138(А). Решить неравенство

$$\arcsin\sqrt{x^2-3}>\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

139(А). Решить неравенство

$$3^y-3\cos x+\sqrt{y-2x^2-1}\le 0.$$

140(А). Построить график функции

$$y=(\cos x)^0\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

141(А). Решить уравнение

$$\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{48}{35}.$$

142(А). Решить неравенство
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\ge\frac{21}{30}.$$

143(А). Решить уравнение
$$\cos\left(\pi\sqrt{x^2-4x-5}\right)=\frac{1-x^3}{x^2+x+1}+x.$$

144(А). Решить уравнение
$$\frac{1}{4}\log_{x-2}(x-6)^4-8+4\log_{6-x}(8x-x^2-12)=0.$$

145(А). Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=2,\\ y^4+4=4(x+y).\end{cases}$$

146(А). Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна c, а биссектриса одного из острых углов равна $\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

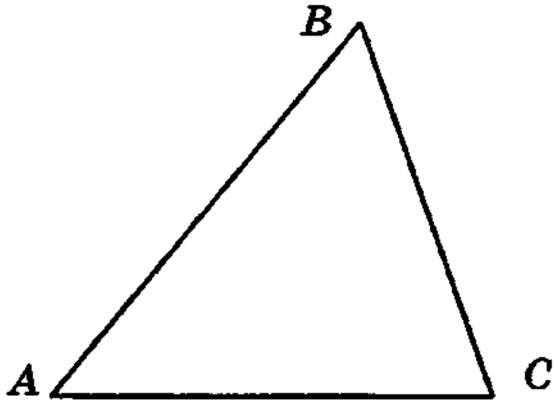
147(А). Окружность радиуса r проходит через середину трех сторон ΔABC, где $\angle A=45°$, $\angle B=75°$. Найти площадь треугольника.

148(А). Решить в целых числах уравнение
$$x^3+y^3+2=2(x+y).$$

149(А). Сравнить $\sin 9$ и $\sin 10$.

150(А). Решить неравенство
$$\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\ge\sqrt{8x-x^2-12}.$$

151. Разрезать произвольный ΔABC в два приема на 3 такие части, чтобы из них можно было составить прямоугольник.



152(А). Решить уравнение $37 \operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x$.

153. Представить многочлен $x^{12} + x^{10} + x^8 + \ldots + x^2 + 1$ в виде произведения двух многочленов не ниже первой.

154. Найти наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 станет квадратом, а после умножения на 3 — кубом натурального числа.

155. Доказать, что если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $r = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$, где r — радиус вписанной окружности.

156(А). Решить уравнение
$$\sqrt{x^2+x-16} + \sqrt{x-x^2+16} = x^2 - 7x + 17.$$

157(А). Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении
$$(x^5 + x^4 - 1)^{2009} \cdot (x^2 - x + 1)^{2010}.$$

158(А). Если сложить два двузначных числа, разделить большее на меньшее, вычесть из большего меньшее, а затем полученные числа сложить, то получится 111. Найти эти числа.

159(А). Между двумя равными двузначными числами вставили вдвое большее число, и полученное число оказалось точным квадратом. Найти все такие числа.

160. Найти все четырехзначные числа, которые, будучи приписаны к числу 400 справа, дадут семизначное число, являющееся квадратом натурального числа.

161(А). В параллелограмме $ABCD$ луч, проведенный из вершины A, делит сторону BC в отношении $3 : 5$ ($BC > AB$). В каком отношении луч делит диагональ BD?

162(А). Вычислить $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin\alpha = 3\cos\alpha$.

163(А). Решить уравнение

$$\left(\frac{3x-2}{4x+3}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{4x-3}\right)^2 = \frac{2(9x^2-4)}{16x^2-9}.$$

164(А). Найти $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

165(А). Решить уравнение

$x^2 - 8x\sqrt{x+1} + 26x - 40\sqrt{x+1} + 41 = 0.$

166(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x(y+1) - 27(y+1)^2 = 0, \\ (x-9y-9)^2 + (x+3y+3)^2 = 36. \end{cases}$$

167(А). Решить неравенство $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.

168(А). Решить в натуральных числах уравнение $x^3 - 27y^3 = 37$.

169(А). Найти сумму квадратов корней многочлена $M(x) = 4p^2(x) + 3p(x) \cdot q(x) - q^2(x)$, если $p(x) = \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{x}{5} - \dfrac{27}{5}$, $q(x) = -\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{4x}{5} + \dfrac{17}{5}$.

170(А). Найти все трехзначные числа, которые в 3 раза больше суммы всевозможных двузначных чисел, составленных из них без перестановок.

171(А). Построить график функции $y = 3^{\log_9 \frac{x^2-4}{x-2}}$.

172(А). В равнобедренной трапеции длины боковых сторон равны по 13 см, большее основание — 20 см, а площадь — 180 см^2. Найти длину меньшего основания.

173(А). Построить график функции
$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}$.

174(А). Решить неравенство

$$\sin^2 2013° + \cos^2 213° \geq 2\sin\frac{x}{2}.$$

175(А). Построить график функции

$$y = 3^{\log_9(x^2-2x+1)}.$$

176(А). Решить уравнение

$$\frac{x^2}{|x|}(4-x) + (1-|x|)(1+|x|) = 3.$$

177(А). Найти по крайней мере 2010 решений уравнения $y^2 = x^2 + x^3$ в целых числах.

178(А). Решить уравнение $2\log_2(|x| - x) = -1$.

179(А). Решить неравенство

$$\sqrt{9x^2-6x+x^0} > \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

180. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

181(А). Решить неравенство

$$\arcsin\sqrt{x^2-2} \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

182(А). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+3y^2=1, \\ x-y=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

183. Доказать тождество
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$.

184(А). Построить график функции
$$y = (\cos x)^0 \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

185(А). Решить уравнение
$$\sqrt[3]{\frac{x+56}{x}} + 4\sqrt[3]{\frac{x+19}{x}} = 8.$$

186(А). Решить уравнение
$$\sqrt{x^2-x-1} + \sqrt{1-x-x^2} = x^2 + x + 2.$$

187(А). Решить уравнение
$$\sin\left(\pi\sqrt{4-3x-x^2}\right) = (|x| + x)^0.$$

188(А). Найти наименьшую пару чисел $x, y \in N$, таких, что выполняется равенство $x^2 + y^2 + xy = \overline{aaa}^2$.

189. Доказать, что любой четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм.

190(А). При каких значениях a выражение $3 + \cos x \cdot (6\cos x + a\sin x)$ будет равно 1 хотя бы при одном значении x?

191(А). Найти все трехзначные числа, которые при делении на 11 дают полный квадрат.

192(А). Доказать, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 (n — натуральное число).

193. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (1+y)^x = 100, \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}. \end{cases}$$

194. Доказать неравенство
$$3(1 + a^2 + a^4) \ge (1 + a + a^2)^2.$$

195(А). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3x^2+6x+11}+\sqrt[3]{2x^2+4x+2}=\sqrt{3-x^2-2x}.$$

196(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=\lg\dfrac{x}{y}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$$

197(А). Найти число, при делении на которое числа 200513, 200631 и 200749 давали бы один и тот же остаток.

198(А). Решить уравнение

$$(x+2)9^x+(x-1)3^{x+1}=27.$$

199. Шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ равновелик прямому конусу, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Найти высоту конуса.

200(А). Найти четырехзначное число, у которого сумма двух первых и двух последних цифр равна 13, а сумма квадратов двух последних цифр равна двузначному числу, образованному первыми двумя цифрами искомого числа.

201(А). Решить уравнение

$$\log_3^2 x+(x-2)\log_3 x=8-2x.$$

202(А). Решить уравнение

$$5^{3x}\cdot 4^{4+x}\cdot 3^{16+x}=540^{8-x}.$$

203(А). Стороны треугольника $a=13$ см, $b=$ $=14$ см, $c=15$ см. Две из них (a и b) служат касательными к кругу, центр которого лежит на третьей стороне. Определить радиус круга.

204(А). Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x^2+a^2}{a(x+7)} \geq 1$ выполняется для всех $x \in (-2; 2)$.

205(А). Периодическая нечетная функция определена для всех действительных чисел. Ее период равен 5 и $f(1) = 3$, $f(2) = -4$. Найти значение $f(9) + f(-7) + f(6)$.

206(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$$

207(А). Решить уравнение

$$16x = 9(\sqrt{x} + 13)(2 - \sqrt{4-\sqrt{x}})^2.$$

208(А). Решить уравнение

$$2|x|\ln x + \frac{x^2-4}{|x|+2} = \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}}.$$

209(А). Доказать тождество

$$\frac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha.$$

210(А). Решить неравенство

$$3^{2|x|-x} \leq \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

211(А). Решить уравнение $\sqrt[3]{\dfrac{7+x}{x}} + \sqrt[3]{\dfrac{9-x}{x}} = 4.$

212(А). При каком значении параметра a существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $2(x + y + z) = 4x^2 + y^2$ и $x + 2y + 3z = a$?

213(А). Найти сумму всех значений параметра a из интервала (3; 5), при каждом из которых существует хотя бы одно $x \in [4; 5]$, удовлетворяющее уравнению $\log_3 (4 - |\sin ax|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$.

214(А). В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B, которые соединены с вершиной C. Найти $\angle ACB$.

215(А). Решить уравнение

$$\log_{x+3} (x^3 - 7x + 5) \cdot \log_{x-3} (x + 3) = 3.$$

216. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника можно найти по формуле $S = (2R + r) \cdot r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

217(А). Решить уравнение $64^x - 27^x = 3(48^x - 36^x)$.

218(А). Решить уравнение $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12x}$.

219(А). Решить неравенство

$$\sqrt{7x^2-11x-13} + \sqrt{7x^2-13x-10} \le |2x - 3|.$$

220. Найти цифры x, y, z, если $\sqrt{\overline{xyz}} = x + y^2 + z^3$.

221(А). Решить уравнение

$$(x - 1)\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = 2\sqrt{x^2-2x+2}.$$

222(А). Решить уравнение $x - x^2 - 2x^3 = \frac{1}{3}$.

223(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 13(y-x) = 7x^4 + 6, \\ \sqrt{y} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

224(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

225(А). Найти все a, при которых неравенство $\frac{x-2a-4}{x-a+4} < 0$ выполняется для всех $x \in [2; 3]$.

226(А). Решить уравнение

$$\sqrt{4x^2+4x+3} \cdot \operatorname{arctg}(2x+1) + \sqrt{x^2-4x+6} \cdot \operatorname{arctg}(2-x) = 0.$$

227. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

228(А). Найти функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} f(3x-2) + 7g(x-5) = 1, \\ f(x+2) - g\left(\dfrac{x}{3} - 4\right) = 3x. \end{cases}$$

229(А). Решить уравнение

$$\log_5 (16 + 6x - x^2) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{4}.$$

230(А). В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти отношение R/r, если $S_{\Delta ABC} = 144$ см^2.

231(А). Решить уравнение $x\left(\dfrac{\sqrt{9x^2-1}+1}{\sqrt{9x^2-1}}\right) = \dfrac{35}{36}$.

232(А). Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1C_1B_1D_1$ плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах CC_1, AD и BB_1.

233(А). Является ли число $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ рациональным или иррациональным?

234(А). Решить уравнение

$$50505^x + 121212^x = 131313^x.$$

235(А). Упростить выражение

$$\sqrt[3]{3(4+\sqrt[3]{13}-\sqrt[3]{169})} - \sqrt[3]{13}.$$

236. Решить в натуральных числах уравнение

$$\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2.$$

237(А). Сколько диагоналей можно провести в правильном десятиугольнике?

238(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x = xy + y^2, \\ 4y = x^2 + 2x. \end{cases}$

239(А). Доказать, что уравнение $\sin x = ax$ не может иметь 2010 корней.

240(А). Доказать, что числа вида

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 35) + 36$$

есть точный квадрат.

241(А). Требуется на 100 рублей купить 40 почтовых марок — рублевых, четырехрублевых и двенадцатирублевых. Сколько окажется марок каждого достоинства?

242(А). Доказать, что если $\sin x + \cos x = 1$, то $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$.

243. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 дает остаток 2, на 5 — остаток 3, наконец, на 7 — остаток 2.

244(А). Расположить многочлен $x^3 + x^2 + x + 2013$ по степеням $x + 7$.

245(А). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

246(А). Решить уравнение $2x^7 + x^{28} = 3x^{21}$.

247(А). Представить многочлен $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой.

248(А). Известно, что числа x и y удовлетворяют условию $\dfrac{x}{2y} + \dfrac{9y}{2x} + \dfrac{18xy}{x^2+9y^2} = 6$. Найти наименьшее значение выражения $(x - 7)^2 + 3xy$.

249(А). Углы треугольника относятся как $1 : 5 : 6$. Длина наименьшей стороны равна 2. Найти радиус вписанной окружности.

250(А). Решить неравенство $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$.

251(А). Доказать, что при любом неотрицательном n число $29^n + 19^n + 15^n - 2^n \cdot (1 + 2^{3n} + 3^n)$ делится на 13.

252(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$.

253(А). Решить уравнение $\dfrac{x(4x^2+3)}{(2x+1)^3} = 7$.

254(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 9(x-y)^3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

255(А). Решить уравнение

$$(3x + 1)^2 = 8\sqrt{x}\,(3x - 2\sqrt{x}) + 1.$$

256(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^{x+y} = y^{24}, \\ y^{x+y} = x^{6}. \end{cases}$

257. Доказать, что если p и $2p + 1$ — числа простые и $p \geq 5$, то $4p + 1$ — число составное.

258(А). Доказать, что ни при каком целом значении x дроби $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{49}$; $\dfrac{x^2 + 5x - 9}{169}$; $\dfrac{x^2 + 3x + 15}{121}$ не могут быть равны целым числам.

259. Разложить на множители $(x + y)^7 - x^7 - y^7$.

260. Упростить выражение

$$30\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + 3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144}.$$

261(А). Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}}$.

262. В уравнении $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ освободиться от радикала.

263. Доказать, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

264. Доказать, что если n — целое число, то $n^5 - n$ делится на 5.

265. Четырехзначное число делится на 7 и 19. После умножения его на 29 и деления на 41 получился остаток 39. Найти это число.

266(А). Чему равен n-й член ряда

$$-13 + 17 - 13 + 17 - 13 + 17 - \ldots ?$$

267. Доказать, что если для углов A, B, C некоторого треугольника выполняется соотношение

$\operatorname{tg}(A-B)+\operatorname{tg}(B-C)+\operatorname{tg}(C-A)=0$, то треугольник равнобедренный.

268(А). Решить уравнение

$$x^2(x+1)^2-3x(x^2-1)=4(x-1)^2.$$

269(А). Доказать, что если

$$(x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-1})(y\sqrt{y}+\sqrt{y^3-1})=1,$$

то $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}=0$.

270. Доказать, что $\operatorname{tg}15^\circ\cdot\operatorname{tg}25^\circ\cdot\operatorname{tg}35^\circ\cdot\operatorname{tg}85^\circ=1$.

271. Сколько существует пятизначных чисел, оканчивающихся цифрой 6, которые делятся на 3.

272. Решить уравнение $8^x\cdot(3x+1)=6$.

273. Доказать, что если натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=c^2$, то по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3.

11 класс

1(А). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$.

2(А). Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2009)(x+2010)} + \frac{1}{(x+2010)(x+2011)} + \frac{1}{(x+2011)(x+2012)} + \frac{1}{(x+2012)(x+2013)} = \frac{1}{999999}.$$

3(А). Решить уравнение

$$\frac{(x+4)(x-2)}{x+2} - \frac{3x+4}{x^2-14} = 4.$$

4(А). Доказать, что выражение

$(x^3 - x^2y + xy^2 + y^3)^5 + (x^3 + x^2y - xy^2 + y^3)^5$

делится без остатка на $2(x^3 + y^3)$.

5(А). Не пользуясь таблицами логарифмов, доказать неравенство $\dfrac{1}{\log_7 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 3$.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9, \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27, \\ x^z + z^y + y^x = 3. \end{cases}$

7. Разложить многочлен $(x + y)^7 - x^7 - y^7$ на множители.

8(А). По двум сторонам треугольника a и b найти радиус описанной окружности, если известно, что угол, лежащий против третьей стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

9(А). Доказать, что если $a + b + c = 12$, то

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le 9.$$

10. Сократить дробь $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$.

11. Доказать, что при $n \in Z$ и $n \ge 0$ выражение $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ кратно 57.

12. Доказать, что для любого целого числа n число $(\sqrt{2} - 1)^n$ можно представить в виде разности $\sqrt{m+1} - \sqrt{m}$, где m — целое.

13(А). Упростить выражение

$$\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}.$$

14. Найти все простые числа p, такие, что $p + 10$ и $p + 14$ также являются простыми.

15(А). Упростить выражение $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

16(А). Решить уравнение

$$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = \frac{1}{4}x.$$

17(А). Доказать, что выражение $(x^2 - xy + y^2)^7 + (x^2 + xy + y^2)^7$ делится без остатка на $2x^2 + 2y^2$.

18(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^4 - y^4 = 20(x+y). \end{cases}$$

19(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy(x^2 + y^2) = 78. \end{cases}$$

20(А). Пусть $f(\cos x) = \cos 13x$. Доказать, что $f(\sin x) = \sin 13x$.

21(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y^2-1}+y\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{x^2+y^2-2}, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

22(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{121}{13}, \\ x+y=2. \end{cases}$$

23(А). Известно, что отрезки с длинами a, b, c образуют треугольник. Доказать, что отрезки с длинами $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$ также образуют треугольник.

24(А). Решить неравенство $3x^7 - x^4 + x > 3$.

25. Доказать, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \le \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

26(А). Решить уравнение $2\sin\dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{x^2+1}{x}$.

27(А). Решить неравенство

$$\arccos\left(\log_2\frac{x}{3}\right) < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

28(А). Решить уравнение $\sqrt[x]{4} + 2x\sqrt[x]{2} - 6x = 9$, где $x > 0$.

29(А). Что больше: $(1{,}001)^{1000}$ или 2?

30(А). Роща имеет форму круга радиуса 258 м. Расстояние между двумя деревьями в ней не менее 12 м. Доказать, что в роще менее 2013 деревьев.

31. Решить уравнение $\sqrt[x]{x} = \sqrt{x^x}$.

32(А). Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$, $n \in N$, на 63?

33(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (4x^3 - 3x)^4 + (4y^3 - 3y)^4 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

34. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^{x+y} - y^{12} = 0, \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$

35(А). Решить уравнение $\sin x + \sin^7 x - \sin 7x = 3$.

36(А). Решить уравнение
$(x^3 + 2x + 10)^3 + 2(x^3 + 2x + 10) + 10 = x$.

37. Доказать, что если a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то справедливо равенство $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

38(А). Решить уравнение $x^4 + 26x^2 - x + 182 = 0$.

39(А). Решить уравнение

$$6\,\mathrm{tg}^3 x - 5 = \sqrt[3]{\frac{1}{6}(\mathrm{tg}\,x + 5)}.$$

40(А). Решить уравнение

$$(x^2 + x + 1)(x^{12} + x^{11} + x^{10} + \ldots + 1) = \\ = (x^7 + x^6 + \ldots + 1)^2.$$

41(А). Построить график функции

$$y = (\log_{2013} x^{2013})^0 \cdot \frac{|x^3| + 8}{x^2 - 2x + 4}.$$

42(А). Решить неравенство $5x^2 + \dfrac{2}{x} \le 3\sqrt[3]{5}$.

43(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + yz + xz = 27, \\ xyz = x + y + z; \end{cases} \text{где } x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$$

44(А). Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = \sin x + \sqrt{x-3}.$$

45(А). Решить неравенство $3^{2|x|-x} \le \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

46(А). Доказать, что если $\sin x + \cos x = a$, то $\sin^5 x + \cos^5 x = \frac{a}{4}(5 - a^5)$.

47(А). Решить неравенство $\frac{x}{|x|} \le \sqrt{9-x^2}$.

48(А). Решить неравенство

$$2^{\sqrt{x-3}} \le \arcos(\cos 2\sqrt{2}).$$

49(А). Решить уравнение

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) = 6.$$

50(А). Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $5f(x) = 3f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}$, где $x > 0$.

51(А). Решить неравенство

$$|\operatorname{arctg}(\log_2 x)| < \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

52(А). Найти все значения a, при которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена $x^3 - 9x^2 + 3ax + a$ удовлетворяют равенству $(x_1-2)^3 + (x_2-2)^3 + (x_3-2)^3 = 0$.

53(А). Доказать, что если $7\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$, то $3\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 4\operatorname{tg}\alpha$.

54(А). Решить уравнение

$$\cos\left(\pi\sqrt{x^2-4x-5}\right) = \frac{1-x^3}{x^2+x+1} + x.$$

55(А). Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + (\sqrt{x-6{,}5})^2 + 13{,}5 = \frac{x^2-4x+4}{x-4} + x.$$

56(А). Сравнить $\frac{1}{2013}$ и $\ln\frac{2013}{2010}$.

57(А). Решить уравнение

$$(\sin^2 x)' = \frac{4}{\pi}(\arcsin x + \arccos x).$$

58(А). Решить уравнение

$$x^2\sqrt{4-x^2} = |x|^3 - 4|x| + 4\sqrt{2}.$$

59(А). В конус вписан шар. Радиус окружности, которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен α.

60(А). Решить неравенство

$$(4x^2 - x + \sqrt{7})\frac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0.$$

61(А). Решить уравнение $\sqrt{1-x^2} = 3x - 4x^3$.

62(А). В шестизначном числе первая цифра 2. Если ее перенести в конец, не изменяя порядка остальных цифр, то полученное число будет втрое больше исходного. Найти исходное число.

63(А). Решить неравенство $(a-6)2^{\sqrt{x-4}} < a - 3$.

64(А). Решить уравнение $x^2 + \frac{18}{x} = 9\sqrt[3]{3}$.

65(А). Решить неравенство $|x^2-1| + |x^2-9| < 8$.

66. При каком значении a график функции $y = a^x$ касается графика функции $y = \log_a x$?

44(А). Решить уравнение
$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}=\sin x+\sqrt{x-3}.$$

45(А). Решить неравенство $3^{2|x|-x}\le \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

46(А). Доказать, что если $\sin x+\cos x=a$, то $\sin^5 x+\cos^5 x=\frac{a}{4}(5-a^5)$.

47(А). Решить неравенство $\frac{x}{|x|}\le\sqrt{9-x^2}$.

48(А). Решить неравенство
$$2^{\sqrt{x-3}}\le \arccos(\cos 2\sqrt{2}).$$

49(А). Решить уравнение
$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1)=6.$$

50(А). Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $5f(x)=3f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}$, где $x>0$.

51(А). Решить неравенство
$$|\operatorname{arctg}(\log_2 x)|<\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

52(А). Найти все значения a, при которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена $x^3-9x^2+3ax+a$ удовлетворяют равенству $(x_1-2)^3+(x_2-2)^3+(x_3-2)^3=0$.

53(А). Доказать, что если $7\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$, то $3\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4\operatorname{tg}\alpha$.

54(А). Решить уравнение
$$\cos\left(\pi\sqrt{x^2-4x-5}\right)=\frac{1-x^3}{x^2+x+1}+x.$$

55(А). Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + (\sqrt{x-6,5})^2 + 13,5 = \frac{x^2-4x+4}{x-4} + x.$$

56(А). Сравнить $\frac{1}{2013}$ и $\ln\frac{2013}{2010}$.

57(А). Решить уравнение

$$(\sin^2 x)' = \frac{4}{\pi}(\arcsin x + \arccos x).$$

58(А). Решить уравнение

$$x^2\sqrt{4-x^2} = |x|^3 - 4|x| + 4\sqrt{2}.$$

59(А). В конус вписан шар. Радиус окружности, которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен α.

60(А). Решить неравенство

$$(4x^2 - x + \sqrt{7})\frac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0.$$

61(А). Решить уравнение $\sqrt{1-x^2} = 3x - 4x^3$.

62(А). В шестизначном числе первая цифра 2. Если ее перенести в конец, не изменяя порядка остальных цифр, то полученное число будет втрое больше исходного. Найти исходное число.

63(А). Решить неравенство $(a-6)2^{\sqrt{x-4}} < a - 3$.

64(А). Решить уравнение $x^2 + \frac{18}{x} = 9\sqrt[3]{3}$.

65(А). Решить неравенство $|x^2-1| + |x^2-9| < 8$.

66. При каком значении a график функции $y = a^x$ касается графика функции $y = \log_a x$?

67(А). Решить уравнение

$$5+4\cos\frac{x-y}{2}+\cos(x-y)=$$

$$=4\sqrt{4x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{4}=0.$$

68(А). Вычислить

$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7.$

69(А). Сравнить числа

$a=\mathrm{ctg}^2(\lg(2+\sqrt{3}))$ и $b=\mathrm{ctg}^2(\lg(2-\sqrt{3}))$.

70(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2y^2-4x+4y^2=0,\\ x^2-4x+5+y^3=0.\end{cases}$$

71(А). Решить уравнение $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500.$

72(А). Решить уравнение

$$\log_2(3+2x-x^2)=\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi x}{4}.$$

73(А). Решить уравнение

$4(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=-1$, если $x\in[0;1)$.

74. Найти значение $\sin 18°$ и $\cos 18°$, не пользуясь таблицами.

75(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}y^2z^2+4x^2z^2+9x^2y^2=25x^2y^2z^2,\\ x^2+4y^2+25z^2=16,\\ 13\sqrt{5}x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y+2\sqrt{3}z=24.\end{cases}$$

76(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = 3 + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ y^2 = \dfrac{1}{z^2} - 1, \\ z = 12x - 2x^2 - 17. \end{cases}$$

77(А). Найти множество значений функции

$$y = \frac{10}{\pi} \arccos\left(0{,}5(\cos x - \sin x)\right).$$

78(А). Решить систему уравнений

$$7x - 11y = \sqrt[3]{x+y} = \sqrt[5]{x+9y}.$$

79(А). Решить неравенство $3x^7 - x^4 + x > 3$.

80(А). В правильной пирамиде $MABCD$ MO — высота пирамиды. Объем пирамиды равен $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Найти наименьшую площадь боковой поверхности пирамиды.

81(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$

82(А). Решить систему уравнений $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^3 = y^2. \end{cases}$

83(А). Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} (\sin^4 x - \cos^4 x)\,dx$.

84(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4, \\ x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$$

85(А). Решить уравнение

$$5\log_2\left(x-4+\frac{x-6}{x-4}\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3(x-5)}+\frac{1}{3(x-2)}\right)+7.$$

86(А). Найти целое число, которое обращается в квадрат как при увеличении его на 307, так и после уменьшения на 192.

87(А). Найти все целые положительные числа, произведение цифр которых равно $x^2-10x-22$.

88(А). Решить уравнение

$$\log_3^2 x+(x-2)\log_3 x=8-2x.$$

89(А). Решить систему неравенств $\begin{cases} x-2|x|>1, \\ |x-3|<5. \end{cases}$

90. Решить неравенство $\log_a(x-a)>\log_{\frac{1}{a}}(x+a)$.

91(А). Решить уравнение

$$\log_6(9x^2+1)-\log_6 x=3x(2-3x).$$

92(А). Вычислить $\log_3 18$, если $\log_3 12=a$.

93. Доказать, что число вида

$$(10^n+10^{n+1}+\ldots+10+1)(10^{n+1}+35)+36$$

есть точный квадрат.

94(А). Доказать, что если $a+b+c=0$, то $18(a^5+b^5+c^5)=25(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)$.

95(А). Решить уравнение $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=5$.

96. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\sin(\arccos x).$$

97(А). Найти хотя бы одну тройку целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=z^{13}$.

98(А). Сколько существует четырехзначных чисел — квадратов, у которых одинаковы две первые и две последние цифры?

99(А). Решить неравенство

$$\cos\left(\arcsin\sqrt{2x+1}\right) < \arccos(\cos 5).$$

100(А). В ΔABC стороны a, b, c ($a < b < c$) образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $R \cdot r = 130$, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Найти наименьшую тройку натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих условию задачи.

101(А). Трехзначное число $\overline{abc}$ является квадратом. Найти все такие числа, если $\overline{abc} = \overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ac}$.

102(А). Построить график функции

$$y = \frac{|x|}{x} - 2\sin|x|\sin x.$$

103(А). Решить неравенство

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) \ge 1.$$

104(А). Доказать, что если $\cos\alpha + \cos\beta = a$ и $\sin\alpha + \sin\beta = b$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}$.

105(А). Решить в целых числах уравнение $x^{10} + 5x^5 - y^8 - 4y^4 = 1$.

106(А). При каких значениях x дробь $\dfrac{x^3+6x^2+35x-42}{x^3+5x^2+28x-84}$ можно сократить на 2010?

107. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{7}{16}$.

247. Доказать, что при любом натуральном n следующие выражения есть целые числа:

$$\frac{10^2+2}{3};\ \frac{10^2+8}{9};\ \frac{10^2+5}{5}.$$

248. При каком условии многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ является кубом двучлена первой степени?

249(А). Найти условие делимости $(x + 1)^m + (x - 1)^m$ на x, где $x \in N$.

250(А). Разложить на множители $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

251. Решить в рациональных числах уравнение $x^y = y^x$.

252(А). Произведение первой цифры числа на оставшуюся часть равно 104, а последней цифры на оставшуюся часть — 243. Найти это число.

253. Найти прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы целыми числами, причем все 9 цифр, участвующих в записи сторон, различны.

254. Найти все тройки чисел $a, b, c \in N$, являющихся длинами сторон треугольника с диаметром описанной окружности, равным 6,25.

255(А). Решить в целых числах систему уравнений $\begin{cases}4k+1=m^2,\\ 3k+1=n^2,\end{cases}$ где $k > 0$.

256(А). Найти в целых числах решение системы уравнений $\begin{cases}a+b+c=x+y,\\ a^2+b^2+c^2=x^2+y^2,\end{cases}$ если числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию.

Раздел II

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

9 класс

1. *Решение.* Данная сумма равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$ и может оканчиваться на 0, 1, 3, 5, 6, 8, но не на 7.

Ответ: нет.

2. *Решение.* $80^{13} < 81^{13} = (3^4)^{13} = 3^{52} < 3^{56} = (3^4)^{14} = (3^2)^{28} = 9^{28} < 10^{28}$.

Ответ: $80^{13} < 10^{28}$.

3. *Указание.* Если n — нечетное, то делится; если n — четное, то не делится. Положить $x = 0$.

4. *Ответ:* делится.

Указание. Положить $2^{13} = x$, тогда $2^{54} + 1 = 4x^4 + 1$; $2^{27} + 2^{14} + 1 = 2x^2 + 2x + 1$, и т. д.

5. *Решение.* Возведем обе части неравенства в куб: $1 + x < 1 + 3 \cdot \dfrac{x}{3} + 3 \cdot \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x^3}{27} = \left(1+\dfrac{x}{3}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{1+x} < 1 + \dfrac{x}{3}$.

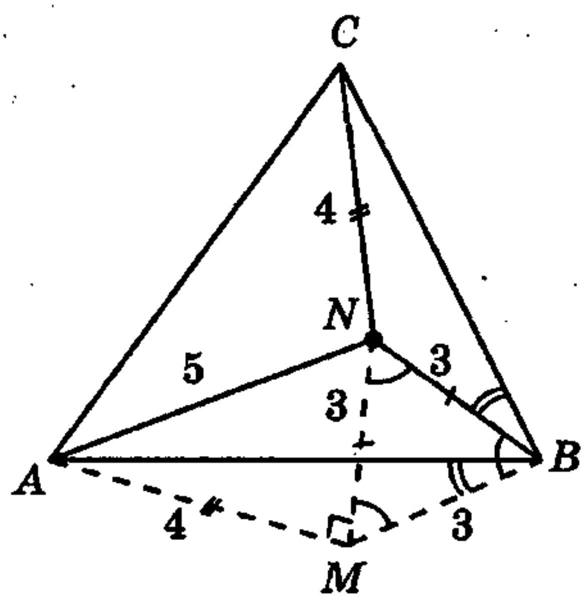
6. *Ответ:* $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

7. *Указание.* Показать, что $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

8. *Указание.* Достаточно взять $a = n + 4$, тогда $an + 4 = (n + 2)^2$ — составное.

9. *Ответ:* $(\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

10. *Указание.* $\angle AMB = 150°$ (см. рис.). AB находим из ΔAMB по теореме косинусов.



Ответ: $\sqrt{25+2\sqrt{3}}$.

11. *Решение.* Нет, так как иначе корзины с четным и нечетным количеством орехов должны чередоваться, т. е. корзин должно быть четное число.

12. *Ответ:* $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

13. *Ответ:* 4567.

14. *Указание.* Учесть, что ΔMNK и ΔKPE вместе составляют ΔMKE. Тогда площадь пятиугольника равна двум площадям ΔMKE, т. е. равна $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot = 1$.

15. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}5$.

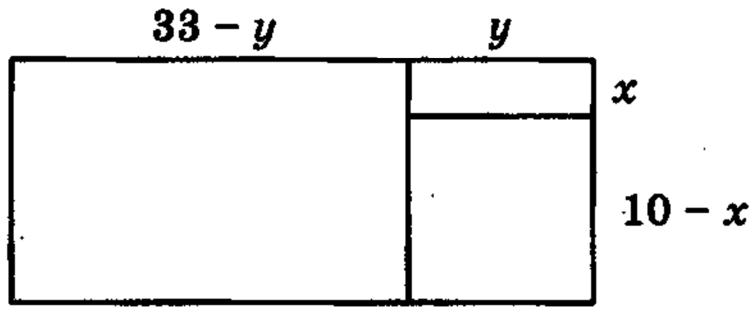
16. *Ответ:* $(2; -1)$, $(-1; 2)$, $(-1; 1)$.

Указание. $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$. Далее замена $x + y = a$, $xy = b$, и т. д.

17. *Решение.* При $x = 13$ имеем $a \cdot 13^2 + b \cdot 13 + c = 2$, а при $x = 60$ получим $a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 3$. Вычитая из второго равенства первое, находим $a(60^2 - 13^2) + b(60 - 13) + c = 1$, а если a и b — целые, то 1 делится на $60 - 13 = 47$, что неверно.

18. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 8$.

19. ***Решение.*** Из подобия прямоугольников имеем $\frac{x}{y} = \frac{y}{10-x} = \frac{10}{33-y}$.



Из I и II уравнений $x = \frac{10}{33-y}$. (1)

Из II и III уравнений получим $y(33 - y) = 100 - 10x$, или, учитывая (1), находим $y(33 - y) = \frac{100(33-2y)}{33-y}$, или $y(33 - y)^2 = 100(33 - 2y)$, или

$$y^3 - 66y^2 + 1289y - 3300 = 0. \quad (2)$$

Можно убедиться, что $y = 3$ — корень уравнения (2), тогда $(y - 3)(y^2 - 63y + 1100) = 0$, откуда $y = 3$. Уравнение $y^2 - 63y + 1100 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$. Итак, $y = 3$, тогда из (1) получим $x = 1$.

20. *Ответ:* 75°.

Указание. Использовать теоремы синусов и косинусов.

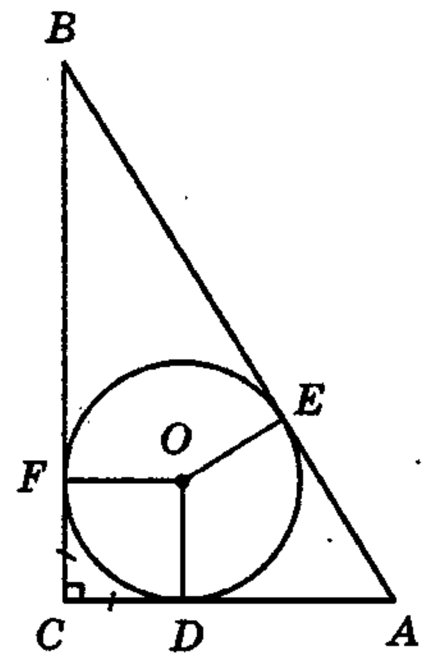
21. *Решение.*

I способ

Поскольку $OD \perp AC$, $OF \perp BC$ и $\angle C = 90°$, то $FODC$ — квадрат. $OD = OF = OE = r$, $AD = b - r$, $BF = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB =$

$= AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, ч. т. д.

II способ



Заметим, что $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, тогда $ab = (a + b + c)r$, откуда $r = \frac{ab}{a+b+c}$. (1)

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, или $(a + b)^2 - 2ab = c^2$, т. е. $2ab = (a + b)^2 - c^2$, или $2ab = (a + b - c)(a + b + c)$, тогда (1) примет вид $r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}$, ч. т. д.

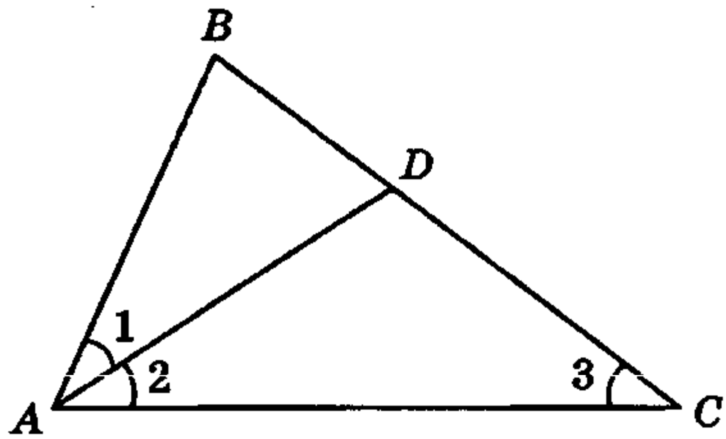
22. *Указание.* $12(x + y) = (5x + 7y) + (7x + 5y)$.

23. Пусть n — число домов, a — первый и b — последний номера домов. Так как номера домов возрастают на 2, то имеем возрастающую арифметическую прогрессию, тогда $S_n = \frac{a+b}{2} \cdot n = 423$. Но $423 = 3 \cdot 3 \cdot 47$, и так как $n \geq 5$, то $n = 9$. Значит, номер пятого (среднего) дома равен 47.

24. *Решение.*

I способ

Проведем биссектрису AD угла A, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, т. е. $AD = DC$. Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$.



Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1 = \angle 3$). Из подобия имеем $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$, или $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x+2} = \frac{y}{5}$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x+2} = \frac{y}{5}; \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases}$ откуда, вычитая из I уравнения II, получим $5y - 10 = 2y$, или $y = \frac{10}{3}$, тогда

$5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3}$, откуда $x = 4$.

Значит, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

II способ

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 180° - 3\alpha$. Полагая, что $AB = x$, $BC = x + 2$, по теореме синусов имеем $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(180° - 3\alpha)}$, или

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{x+2}{\sin 2\alpha}, & (1) \\ \dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{5}{\sin 3\alpha}. & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) находим $\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, или

$$1+\frac{2}{x}=2\cos\alpha. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) получим $x=\dfrac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Поскольку $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, то

$$x=\frac{5}{3-4\sin^2\alpha}.$$

Учитывая (3), имеем $1+\dfrac{6-8\sin^2\alpha}{5}=2\cos\alpha$ или $8\cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 3 = 0$, откуда находим $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Если $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$, то, учитывая (3), имеем $x = 4$.

Если $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, то $1+\dfrac{2}{x}=1$, что невозможно.

Итак, $AB = 4$ см, тогда $BC = x + 2 = 6$ (см).

Замечание. Если $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, то $\alpha = 60°$, тогда $\angle C = 60°$, $\angle A = 120°$, чего не может быть.

25. *Ответ:* $(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$.

26. *Ответ:* $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.

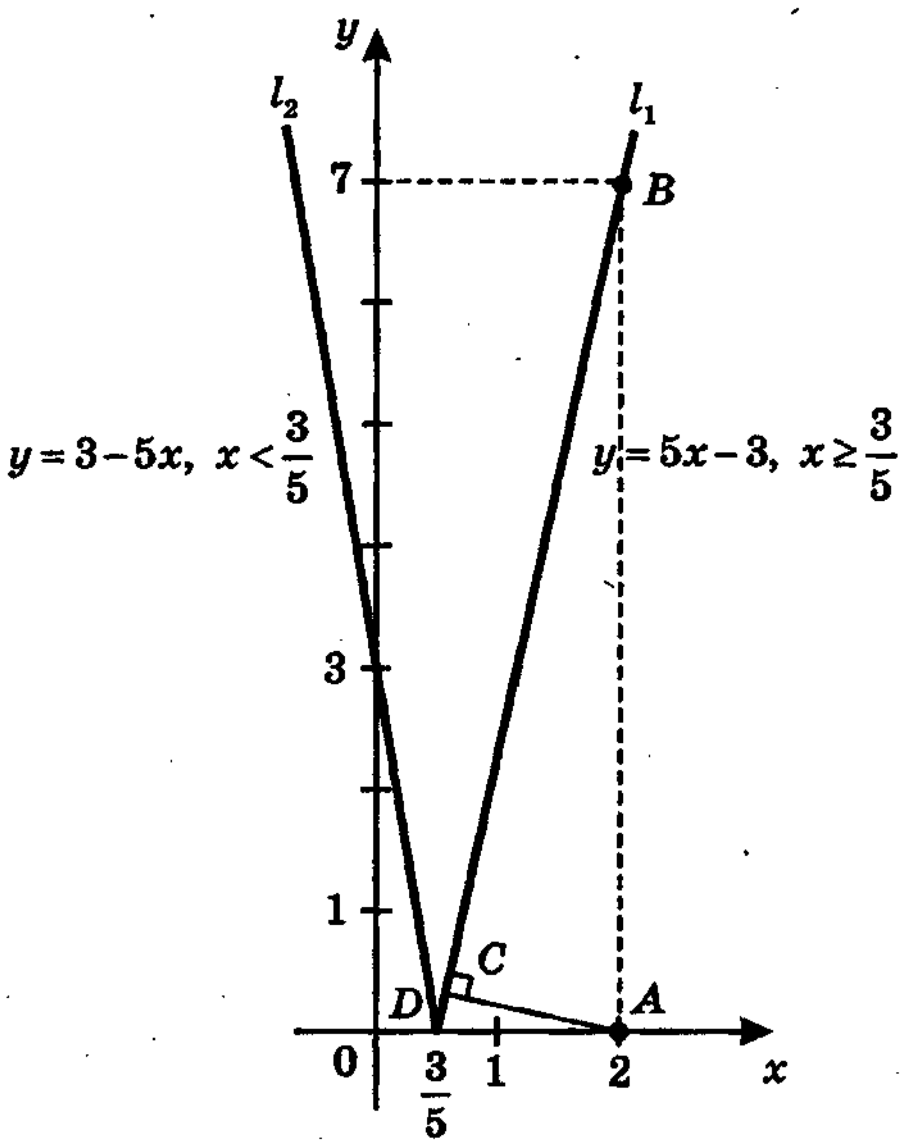
27. *Ответ:* 1.

28. *Ответ:* $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{24-19a}{19-8a}$.

29. *Указание.* Записать уравнение в виде $4x^2 - \dfrac{25}{9} = 4 - \dfrac{10}{3x}$, откуда находим $x_1 = \dfrac{5}{6}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = -\dfrac{3}{2}$.

30. *Решение.*

При $x \geq \dfrac{3}{5}$, $y = 5x - 3$, а ее графиком является прямая l_1.



Заметим, что $k_1 = 5$ — угловой коэффициент прямой l_1. Поскольку $AC \perp l_1$, то угловой коэффициент k_1 прямой AC связан с коэффициентом k_1 соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$, или $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{5}$.

Тогда уравнение прямой AC примет вид

$$y = -\frac{1}{5}(x - 2).$$

Следовательно, точку пересечения прямых AC и l_1 найдем из системы

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{5}(x-2), \\ y = 5x - 3, \end{cases} \text{ или } 5x - 3 = -\frac{1}{5}(x - 2),$$

откуда находим $x = \dfrac{17}{26}$, тогда $y = \dfrac{7}{26}$.

Ответ: $C\left(\dfrac{17}{26}; \dfrac{7}{26}\right)$.

Замечание. Можно привести еще по крайней мере 5 способов решения этой задачи (см. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009. — С. 175–179).

31. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{25}$.

Указание. $2(x - 1) = 2(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$.

32. *Указание.* Записать данное выражение в виде $333^{777} + 777^{333} = (333^{777} + 7^{777}) + (777^{333} - 7^{333}) - (7^{777} - 7^{333})$. Далее учесть, что сумма нечетных степеней делится на сумму оснований, а разность любых целых степеней делится на разность оснований. Наконец, $7^{777} - 7^{333} = 7^{333} \cdot (7^{4 \cdot 111} - 1) = 7^{333} \cdot (2401^{111} - 1)$ — кратно 10.

33. *Решение.*

Легко заметить, что $\cos x = \pm\dfrac{1}{2}$ удовлетворяет данному уравнению, откуда находим $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

При других возможных значениях слева имеем сумму иррациональных чисел, а справа — число 1. Следовательно, других решений данное уравнение не имеет.

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Замечание. Можно привести и другие решения (см. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009. — С. 181–182).

34. *Указание.* Умножить числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения на $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-2}$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

35. *Решение.* Обозначим через x, y, z, u соответственно количество «двоек», «троек», «четверок» и «пятерок». Согласно условию имеем

$$\begin{cases} x+y+z+u=30, & (1) \\ 2x+3y+4z+5u=90. & (2) \end{cases}$$

Кроме того, $u < z < y$. (3)

По условию z кратно 5 и y кратно 7. Из (3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow y \neq 0$, $z \neq 0$. Из (1) и (2) исключим x:

$\begin{cases} 2x+2y+2z+2u=60, \\ 2x+3y+4z+5u=90, \end{cases}$ откуда

$$y + 2z + 3u = 30. \qquad (4)$$

Так как z кратно 5 и $z \neq 0$, то из (4) $\Rightarrow z = 5$, или $z = 10$.

1. Если $z = 5$, то (4) примет вид $y + 3u = 20$. (5) Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то с учетом (5) находим $y = 7$ или $y = 14$. Но если $y = 7$, то из (5) $\Rightarrow$ $\Rightarrow 3u = 13$ — не подходит, так как u — целое число. Если $y = 14$, то $3u = 6$, $u = 2$, тогда $x = 9$.

2. Если $z = 10$, то $y + 3u = 10$. Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то с учетом условия $z < y$ следует, что при $z = 10$ должно быть $y > z$ и уравнение $y + 3u = 10$ не имеет решения при указанном ограничении.

Итак, $x = 9$, $y = 14$, $z = 5$, $u = 2$, т. е. «пятерок» — 2, «четверок» — 5, «троек» — 14, «двоек» — 9.

36. *Указание.* Обозначить $y = 3^x$.

37. *Ответ:* (0; 0), (2; 3), $\left(-\frac{26}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.

Указание. Записать I уравнение в виде $(x - 2y)(3x - 2y) = 0$, и т. д.

38. *Решение.* Пусть $a = 17$, $b = 25$, $c = 26$ см — стороны I треугольника, $a = 17$, $b = 25$ — две стороны II треугольника и x — длина третьей стороны. По условию у данных треугольников равны радиусы вписанных окружностей, тогда

$r = \frac{S_1}{p_1} = \frac{S_2}{p_2}$, где $S_1 = \sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - b)(p_1 - c)}$,

$p_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) = 34$ и

$S_1 = \sqrt{34 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 8} = 204$ (см^2).

Аналогично, $p_2 = \dfrac{42+x}{2}$,

$$S_2 = \sqrt{\frac{42+x}{2}\cdot\left(\frac{42+x}{2}-17\right)\cdot\left(\frac{42+x}{2}-25\right)\cdot\left(\frac{42+x}{2}-x\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{42+x}{2}\cdot\frac{42-x}{2}\cdot\frac{8+x}{2}\cdot\frac{x-8}{2}}.$$

Итак, $\dfrac{1}{4}\sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)} : \dfrac{1}{2}(42+x) =$

$= \dfrac{204}{34}$, $\dfrac{\sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)}}{2(42+x)} = 6$, или

$(42 + x)(42 - x)(x + 8)(x - 8) = 144(42 + x)^2$,
$42 + x \neq 0$
$(42 - x)(x^2 - 64) = 144(42 + x)$, или
$x^3 - 42x^2 + 80x + 8736 = 0$, или
$x^2(x - 28) - 14x(x - 28) - 312(x - 28) = 0$,
$(x - 28)(x^2 - 14x - 312) = 0$, $x_1 = 28$,
$x^2 - 14x - 312 = 0$,

откуда находим $x_2 = 26$, $x_3 = -12$ (не подходит). Если $x = 26$, то получим I треугольник. Итак, длина третьей стороны II треугольника равна 28 см. При этом $r = 6$ см (можно проверить непосредственно).

Ответ: 28 см.

Замечание 1. Условие этой задачи заимствовано из книги *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975. № 167. С. 41–42.

Замечание 2. Редким примером «тупоугольных близнецов» служат треугольники со сторонами, равными соответственно 97, 169, 122 и 97, 169, 228. У каждого из них $r = 30$ (см. там же).

Замечание 3. Представляет интерес нахождение двух треугольников подобного вида, у которых равны радиусы описанных окружностей (прим. авт.).

39. *Указание.* Ввести замену $\sqrt{x-2} = y$.

40. *Ответ:* $(\pm 3; \pm 1)$, $(\pm 1; \pm 3)$.

Указание. Возвести I уравнение в квадрат и учесть II уравнение.

41. *Решение.* Известно, что $S_\Delta = \dfrac{abc}{4R} = pr$, или

$$\frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2}r, \text{ откуда } 2Rr(a+b+c) = abc. \qquad (1)$$

По условию $Rr = 130$, тогда (1) примет вид

$$260(a+b+c) = abc. \qquad (2)$$

Поскольку стороны a, b, c ΔABC образуют арифметическую прогрессию, то $2b = a + c$, тогда (2) примет вид $260 \cdot 3b = abc$, откуда $ac = 780$.

Итак, $a + c = 2b$, $ac = 780$, т. е. стороны a и c можно принять за корни некоторого квадратного уравнения

$x^2 - 2bx + 780 = 0$,

$D/4 = b^2 - 780$, $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 780}$.

Наименьшую тройку (a, b, c) получим, полагая $b = 28$, $x_{1,2} = 28 \pm 2$, откуда $x_1 = 30$, $x_2 = 26$.

Так как $a < b < c$, то условию задачи удовлетворяет наименьшая тройка чисел (26; 28; 30).

Ответ: (26; 28; 30).

42. *Решение.* Если $p \neq 3$, то $14p^2 + 1$ делится на 3. И действительно, $p = 3k + 1$, или $p = 3k - 1$, тогда $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$ или $p^2 = 9k^2 - 6k + 1$, а это значит, что остаток от деления числа p^2 на 3 равен 1. Следовательно, $14p^2 + 1$ делится на 3 при любом p, не делящемся на 3, т. е. не является простым числом. Если же $p = 3$, то число $14p^2 + 1 = 127$ — простое.

Ответ: 127.

43. *Ответ:* $(\pm 2; \pm 1)$, $(\pm 1; \pm 2)$.

Указание. Выразить $x^4 + y^4$ через xy, а из II второго уравнения $x^2 + y^2 = 7 - xy$ и т. д.

44. *Решение.* $\left(1+\frac{7}{\sin x}\right)\left(1+\frac{19}{\cos x}\right) > 293$,

$$1 + \frac{7}{\sin x} + \frac{19}{\cos x} + \frac{7 \cdot 19 \cdot 2}{2\sin x \cos x} =$$

$$= 1 + \frac{7}{\sin x} + \frac{19}{\cos x} + \frac{266}{\sin 2x} > 1 + 7 + 19 +$$

$+ 266 = 293$, ч. т. д.

45. *Ответ:* $(3; -1)$.

Указание. Учесть, что $x - 2y < x < x^2 + 2xy + 4y^2$.

46. *Ответ:* $(0; 0; 0)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$.

Указание. Перенести xyz в каждом уравнении в правую часть, а затем перемножить.

47. *Решение.* Поскольку четвертая степень числа БЕС $= x$ является четырехзначным числом, то само число x не меньше 6 и не больше 9, так что БЕСЫ — одно из чисел 1296, 2401, 4096, 6561. Из перечисленных чисел лишь второе удовлетворяет требуемому условию, а именно: Б = 2, Е = 4, С = 0, Ы = 1.

Ответ: $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4$.

48. *Ответ:* 1) $AB = \dfrac{21\sqrt{6}}{2}$ м ; $AC = \dfrac{15\sqrt{6}}{2}$ м.

2) $AB = \dfrac{51\sqrt{66}}{22}$ м ; $AC = \dfrac{15\sqrt{66}}{22}$ м.

49. *Решение.* $a^4 + b^4 \ge 2a^2b^2$; $b^4 + c^4 \ge 2b^2c^2$; $a^4 + c^4 \ge 2a^2c^2$. Складывая полученные неравенства и учитывая, что $a^2 + c^2 \ge 2ac$, получим требуемое.

50. *Решение.* Допустим противное. Тогда общее количество кроликов будет не меньше, чем

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 45 = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 46 = 1035 > 1000.$$

51. *Ответ:* 25π м^2.

Указание. Соединить точку касания и вершины оснований трапеции с центром окружности.

52. *Указание.* Найти сумму m, n и $m + n$ членов.

53. *Указание.* Привести неравенство к виду $(6 \sin x - \cos x)^2 > 0$.

54. *Ответ:* [1; 3].

Указание. Ввести замену $y = \sqrt{2x-2}$, где $y \ge 0$. Можно решить иначе, например, выделить полный квадрат под каждым подкоренным выражением.

55. *Ответ:* могут, если знаменатель прогрессии $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

56. *Решение.*

I способ

$(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - 2x^2 - 4x + 1 = 0$, или
$(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) \cdot 1 + 1 = 0$,
$(x^2 + 2x - 1)^2 = 0$, или $x^2 + 2x - 1 = 0$,
откуда находим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

II способ

Запишем уравнение в виде
$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.
Из условия следует, что $x \neq 0$, тогда

$x^2 + 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$,

или $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

Заменой $x - \frac{1}{x} = t$ получим $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$, тогда $t^2 + 4t + 4$, $(t + 2)^2 = 0$, $t = -2$.

Значит, $x - \frac{1}{x} = -2$, или $x^2 + 2x = -1$, и т. д. (см. I способ).

III способ

Вычтем из обеих частей уравнения $4x^2$.
$(1 + x^2)^2 - 4x^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$, или
$(1 - x^2)^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$.
Разделим обе части на $x(1 - x^2) \neq 0$.

Получим $\frac{1-x^2}{x} = 4 - 4 \cdot \frac{x}{1-x^2}$.

Пусть $\frac{1-x^2}{x} = y$, тогда $y = 4 - \frac{4}{y}$,

или $y^2 - 4y + 4 = 0$, $(y - 2)^2 = 0$, $y = 2$, и т. д.
(см. I способ).

IV способ

Пусть $x = \operatorname{tg} t$, тогда $(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2 = 4 \operatorname{tg} t\,(1 - t^2)$.

Далее имеем $\frac{1}{\cos^4 t} = \frac{4\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t}$, или

$\frac{1}{\cos t} = 4 \sin t \cos 2t$; $4 \sin t \cos t \cos 2t = 1$;

$2\sin 2t\cos 2t = 1$, или $\sin 4t = 1$, $4t = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$t = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, тогда $x = \left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}\right)$, и т. д.

57. *Ответ:* $(-\infty; 0)$.

58. *Ответ:* 500 500.

Указание. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Далее использовать формулу суммы $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

59. *Ответ:* 16 м^2.

Указание. Использовать формулу

$S = \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$, где $d_1 = d_2$ и φ — угол между диагоналями.

60. *Ответ:* $x = 55$.

61. *Решение.* $\dfrac{a^3 + b^3}{2} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3 =$

$= \dfrac{3}{8}(a + b)(a - b)^2 \geq 0$.

62. *Ответ:* $22 + 24 + 26 + 28 = 100$;

$16 + 18 + 20 + 22 + 24 = 100$.

Указание. $2a + (2a + 2) + (2a + 4) + \ldots +$

$+ (2a + 2k) = 100$,

или $a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + k) = 50$.

Далее использовать формулу суммы арифметической прогрессии

$\dfrac{a + (a + k)}{2} \cdot n = 50$, или $(2a + k) \cdot n = 100$.

Далее учесть, что $a_n = a + k$, а с другой стороны, $a_n = a_1 + (n - 1)d$, тогда $a + k = a + n - 1$, $n = k + 1$ и $(2a + k)(k + 1) = 100$, и т. д.

63. *Указание.* Положить $n = 1$ и $n = 2$.

64. *Решение.* Поскольку $a + b + c \neq 0$, то, умножив обе части равенства на $a + b + c$, получим

$$\frac{(a+c)+b}{a+c} + \frac{(b+c)+a}{b+c} = 3, \text{ или}$$

$$1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3,$$

или $\dfrac{b}{a+c} + \dfrac{a}{b+c} = 1$, откуда $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

Но $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$ (по теореме косинусов), тогда $\cos \angle C = \dfrac{1}{2}$, $\angle C = 60°$.

Ответ: 60°.

65. *Ответ:* $AB = 7\sqrt{2}$, $BD = \dfrac{7}{2}(1 + \sqrt{3})$.

Указание. Достроить ΔABC до параллелограмма $ABCE$. Далее применить теорему синусов. После преобразований находим AB и BD.

66. *Ответ:* $\frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$.

67. *Решение.* $\dfrac{1}{2^2} < 1 - \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3^2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$; …

$$\frac{1}{1000^2} < \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} < 1 - \frac{1}{1000} = 0{,}999.$$

68. *Ответ:* 5 чисел: 11, 12, 24, 36, 15.

69. *Указание.* Умножить обе части уравнения на 4 и прибавить по единице.

70. *Решение.* Так как $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных целых чисел кратно 2 и 3, то оно кратно 6, тогда $a^5 - a = (a^2+1)(a^3-a)$ и $b^3 - b$ кратно 6.

Значит, делится на 6 и $a+b+c+(a^5-a)+(b^5-b) = a^5+b^3+c$, ч. т. д.

71. *Ответ:* 971.

Указание. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=17, \\ \overline{abc}-\overline{cba}=792. \end{cases}$$

72. *Ответ:* например, $122^2 + 597^2 = 13^5$.

73. *Решение.* По теореме Виета для кубического уравнения имеем $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = p$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения.

Значит, $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$, или $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0$.

Следовательно, $p \le 0$, ч. т. д.

74. *Ответ:* 20 м и 30 м.

Указание. Использовать формулу $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$, где x, y — длины диагоналей, a, b — стороны параллелограмма.

75. *Решение.* Центр искомого круга не должен располагаться ближе 0,5 к сторонам прямоугольника или к одному из квадратиков.

Присоединив к каждому квадратику 1×1 точки, находящиеся от него на расстоянии не больше 0,5, получим фигуру (квадрат со скругленными вершинами) площадью $3 + 0{,}25\pi$.

Эти фигуры не могут покрыть прямоугольник 19×24, даже если они не будут налегать друг на друга, так как $120 \cdot (3 + 0{,}25\pi) < 19 \times 24$.

76. *Ответ:* $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Указание. $y = \frac{1}{9}x^2 + 2$, тогда $x = \frac{1}{9}y^2 + 2$. Далее вычесть из I уравнения II.

77. *Ответ:* $-3{,}5$.

78. *Решение.* $n(n^4 - 125n^2 + 4) =$
$= n(n^4 - 5n^2 + 4) - 120n^3 =$
$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) - 120n^3$.

79. *Решение.* По теореме Виета $x_1 + x_2 = -2a$, $x_1x_2 = -\frac{1}{8a^2}$, тогда $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2x_2^2 =$

$$= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left(4a^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2 -$$

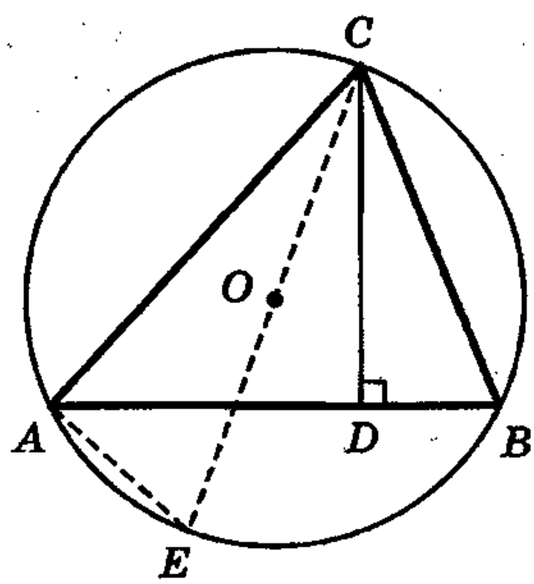
$$- 2 \cdot \frac{1}{64a^4} = 16a^4 + 2 + \frac{1}{32a^4} \geq 2 + 2\sqrt{16a^4 \cdot \frac{1}{32a^4}} =$$

$= 2 + \sqrt{2}$, ч. т. д.

80. *Указание.* $D = b^2 - 4ac = 0$, или
$9 - 2 \cdot 2 \cdot (17 + m) = 0$, откуда $m = -15\frac{7}{8}$.

81. *Ответ:* $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = \pm 1$.

82. *Решение.* Пусть в ΔABC $AC = 20$ см, $BC = 13$ см, $OC = \frac{65}{6}$ см.



Из вершины C опустим высоту CD и проведем диаметр CE. Далее соединим точку A с точкой E. Тогда ΔCAE прямоугольный, так как вписанный угол CAE опирается на диаметр CE. Из подобия ΔACE и ΔCDB имеем

$\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{AC}{CE}$, откуда $CD=\dfrac{CB\cdot AC}{CE}=12$ (см).

Из ΔCDB $DB=\sqrt{13^2-12^2}=5$ (см).

Из ΔACD $AD=\sqrt{20^2-12^2}=16$ (см).

Значит, $AB=16+5=21$ (см).

Ответ: 21 см.

83. *Решение.* $100\,000\cdot 0{,}3=30\,000$ (руб.).

84. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$. (1)

Возведем обе части (1) в квадрат:

$\left(x^2+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1225}{144}$, или

$$\frac{x^4}{x^2-1}+2\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}. \qquad (2)$$

Пусть $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=y$, где $y>0$, тогда уравнение (2) примет вид $y^2+2y-\dfrac{1225}{144}=0$.

$D/4=1+\dfrac{1225}{144}=\left(\dfrac{37}{12}\right)^2>0$, $y_{1,2}=-1\pm\dfrac{37}{12}$, откуда $y_1=\dfrac{25}{12}$, $y_2=-\dfrac{49}{12}$ (не удовлетворяет условию $y>0$). Учитывая замену, получим $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=$

$= \frac{25}{12}$, или $\frac{x^4}{x^2-1} = \frac{625}{144}$, $144x^4 - 625x^2 + 625 = 0$,

$D = 175^2 > 0$, $x^2 = \frac{25}{9}$, $x = \frac{5}{3}$, $x^2 = \frac{25}{16}$, $x = \frac{5}{4}$, поскольку $x > 0$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.

II способ

Пусть $\sqrt{x^2-1} = y$, где $y > 0$, тогда $x^2 = y^2 + 1$ и уравнение (1) примет вид

$$1 + \frac{1}{y} = \frac{35}{12x}. \qquad (3)$$

Возведем обе части (3) в квадрат:

$1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{1225}{144x^2}$, и так как $x^2 = y^2 + 1$, то имеем $1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{1225}{144(y^2+1)}$, или $y + 2 + \frac{1}{y} = \frac{1225y}{144(y^2+1)}$, $y > 0$.

Полученное уравнение запишем в виде

$$y + \frac{1}{y} + 2 = \frac{1225}{144\left(y+\frac{1}{y}\right)}. \qquad (4)$$

Заменой $y + \frac{1}{y} = t$ уравнение (4) приводим к виду $t^2 + 2t - \frac{1225}{144} = 0$, и т. д., как в I способе.

Замечание. Исходное уравнение можно решить заменой $x = \frac{1}{\sin t}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

85. *Указание.* Из второго конца гипотенузы провести прямую внутри треугольника под углом 15° к гипотенузе.

86. *Ответ:* при $a \in (2; 4)$.

87. *Решение.*

I способ (выделение в левой части полного квадрата)

Запишем данное уравнение в виде

$$16x^2 - 24x\sqrt{x+13} + 9(x+13) = 0. \qquad (1)$$

$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3\sqrt{x+13} + 3^2(x+13) = 0$, или

$(4x - 3\sqrt{x+13})^2 = 0$; $4x = 3\sqrt{x+13}$, $x > 0 \Rightarrow$ из исходного уравнения, так как $16x^2 + 9x + 117 > 0$ при любом $x \in R$ и $x + 13 \geq 0$.

Далее имеем $16x^2 + 9(x+13) = 0$, или

$16x^2 - 9x - 117 = 0$, откуда получим

$x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{39}{16} < 0$.

Ответ: $x = 3$.

II способ (замена переменной)

Разделим обе части (1) на $x\sqrt{x+13} \neq 0$.

Получим $16 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \frac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0$.

Далее замена $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = y$, где $x > 0$, тогда $y > 0$, и т. д.

III способ (приведение к однородному)

$\sqrt{x+13} = y$, тогда $9x + 117 = 9(x + 13) = 9y^2$, и данное уравнение примет вид

$16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$, или $(4x - 3y)^2 = 0$, и т. д.

88. *Ответ:* 13 и 1325.

89. *Ответ:* является при $n = 3$.

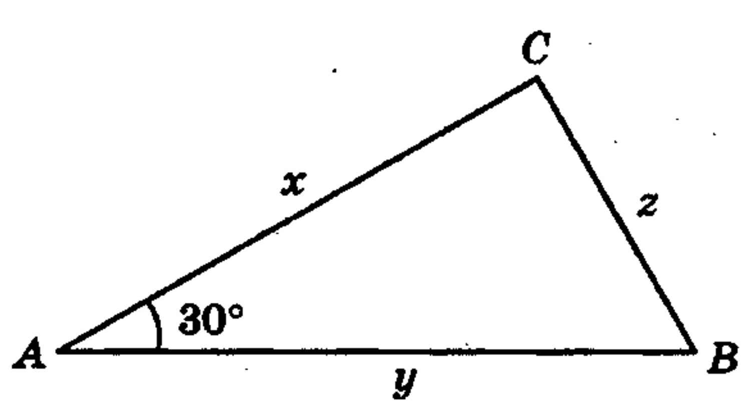
90. *Ответ:* $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$.

91. *Решение.* Пусть стороны прямоугольного треугольника a, $a + d$ и $a + 2d$, где d — разность прогрессии, тогда по теореме Пифагора получим $a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2$, откуда $a = 3d$.

Известно, что площадь треугольника $S = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(a + a + d + a + 2d) = \frac{3}{2}(a + d)$ — полупериметр, $S = \frac{1}{2}a(a + d)$, тогда $r = \frac{S}{p} = \frac{a}{3} = d$, ч. т. д.

92. *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{4}{3}\right] \cup [6; +\infty)$.

93. *Решение.* Пусть $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$, тогда по теореме синусов $\frac{z}{\sin 30^\circ} = 2R$, откуда $z = 2R \cdot \frac{1}{2} = R$ — радиус описанной окружности.



Известно, что $S_\Delta = \dfrac{xyz}{4R}$, $S_\Delta = \dfrac{xyz}{4R} = \dfrac{1}{4}xy$. (1)

Замечание. Соотношение (1) можно получить по формуле $S_\Delta = \dfrac{1}{2}xy\sin\alpha$, где $\alpha = 30°$.

С другой стороны, $S_\Delta = p \cdot r = \dfrac{1}{2}(x + y + z)r$. (2)

Сравнивая (1) и (2), имеем $\dfrac{1}{4}xy = \dfrac{1}{2}(x + y + z)$, или $xy = 2(x + y + z)r$. (3)

По теореме косинусов $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 30°$, или $R^2 = x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,xy$, $R^2 = (x + y)^2 - (2 + \sqrt{3})xy$. (4)

Из (3) $\Rightarrow x + y + R = \dfrac{xy}{2r}$, откуда $x + y = \dfrac{xy}{2r} - R$, тогда (4) примет вид

$R^2 = \left(\dfrac{xy}{2r} - R\right)^2 - (2 + \sqrt{3})xy$, или

$\left(\dfrac{xy}{2r}\right)^2 = \left(\dfrac{R}{r} + 2 + \sqrt{3}\right)xy$, $xy \neq 0$, тогда

$\dfrac{xy}{4r^2} = \dfrac{R}{r} + 2 + \sqrt{3}$, откуда

$\dfrac{xy}{4} = \left(\dfrac{R}{r} + 2 + \sqrt{3}\right)r^2 = r(R + (2 + \sqrt{3})r) = S_{\Delta ABC}$,

ч. т. д.

94. *Ответ:* $\dfrac{25}{12}$.

Указание. Если x и y — катеты, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей, то $x^2 + y^2 = 4R^2$, $2r = x + y + 2R$, и т. д.

95. *Ответ:* $x = 15$.

Указание. Ввести замену $\sqrt{x} = y$, $y \geq 0$. Далее разложить на множители числитель и знаменатель дроби. Полученное неравенство решить методом интервалов.

96. *Решение.* $a^3 + 7a + 19 = 0,\qquad (1)$

$$b^3 + 7b + 19 = 0, \qquad (2)$$
$$c^3 + 7c + 19 = 0. \qquad (3)$$

Вычтем из (1) – (2): $a^3 - b^3 + 7(a - b) = 0$.

Так как $a - b \neq 0$, то $a^2 + ab + b^2 + 7 = 0$. (4)

Теперь вычтем из (1) (3):

$a^3 - c^3 + 7(a - c) = 0$ или, разделив обе части на $a - c \neq 0$, имеем $a^2 + ab + c^2 + 7 = 0$. (5)

Аналогично, вычитая из (4) (5), получим

$a^2 + ab + b^2 + 7 - (a^2 + ac + c^2 + 7) = 0$, или

$$a(b - c) + (b^2 - c^2) = 0. \qquad (6)$$

Наконец, разделив обе части (6) на $b - c \neq 0$, находим $a + b + c = 0$, ч. т. д.

97. *Указание.* Обратить трапецию в равновеликий треугольник, для чего продолжить нижнее основание на длину верхнего.

98. *Ответ:* $\frac{1}{8}$.

Указание. Умножить и разделить выражение на $2 \sin 20°$, а затем применить формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

99. *Решение.* Известно, что $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$. Так как $x - y = a$, $x^3 - y^3 = b$, то $a^3 + 3axy = b$, откуда

$$xy = \frac{b - a^3}{3a}. \qquad (1)$$

Далее имеем $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$, откуда

$x^5 - y^5 = (x - y)^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4$,
или $c = a^5 + 5xy(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$,
или $c = a^5 + 5xy((x^3 - y^3) - 2xy(x - y))$,
$c = a^5 + 5xy(b - 2axy)$. (2)
Учитывая (1), равенство (2) примет вид
$c = a^5 + 5 \cdot \frac{b-a^3}{3a} \cdot \left(b-2\cdot\frac{b-a^3}{3a}\right)$, или

$c = a^5 + \frac{5(b-a^3)(b+2a^3)}{9a}$, или
$9ac = 9a^6 + 5b^2 + 5a^3b - 10a^6$,
$a(a^5 + 9c) = 5b(a^3 + b)$.
Ответ: $a(a^5 + 9c) = 5b(a^3 + b)$.

100. *Решение.* Замена $\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}} = y$, где $y \geq 0$, приводит к уравнению $\frac{12}{x^2} = x^2 - y^2$, при котором исходное уравнение примет вид
$\sqrt{12-x^2+y^2} = x^2 - y^2$, или
$12 - x^2 + y^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$, $2y = \frac{x^4+x^2-12}{x^2}$.
Запишем полученное равенство в виде
$2y = \left(x^2-\frac{12}{x^2}\right) + 1$.

Но $x^2 - \frac{12}{x^2} = y^2$, тогда $y^2 - 2y + 1 = 0$, $(y - 1)^2 = 0$, откуда $y = 1$. Значит, $x^2 - \frac{12}{x^2} = 1$, или
$x^4 - x^2 - 12 = 0$, откуда $x^2 = 4$, т. е.
$x_{1,2} = \pm 2$, $x^2 = -3$ — нет действительных корней.
Ответ: $x_{1,2} = \pm 2$.

101. *Ответ:* $x = \dfrac{\pi n}{8}$, $n \in Z$.

102. *Ответ:* $2(b^2 - c) = (a^2 - b)^2$.

103. *Решение.* Упростить II уравнение системы
$y^2 + 10y + 25 - 2zy - 7z = 0$, или
$(y + 5)^2 - 2z(y + 5) + z^2 = z^2 - 3z$, или
$(y + 5 - z)^2 = z^2 - 3z$.
Третье уравнение запишем в виде
$(x - 3)^2 = 9 - z^2$.
Следовательно, исходная система примет вид

$$\begin{cases}(4-x)^2 = y+3,\\(y+5-z)^2 = z^2-3z,\\(x-3)^2 = 9-z^2.\end{cases}$$

При этом будут выполняться условия

$$\begin{cases}y+3 \ge 0,\\z^2-3z \ge 0,\\9-z^2 \ge 0.\end{cases}$$

Из II и III неравенств $\Rightarrow z \in [-3; 0] \cup \{3\}$. Поскольку $z \ge 0$, то $z = 0$, или $z = 3$. Если $z = 0$, то исходная система не имеет решений; если $z = 3$, то $x^2 + 9 = 6x$, откуда $x = 3$, тогда $y = -2$.

Ответ: $(3; -2; 3)$.

104. *Ответ:* $x = 25$.

105. *Ответ:* $[0; 2]$.

Указание. Записать неравенство в виде
$|1 - 2x| \le x + 1$. Далее рассмотреть два случая:
1) $1 - 2x \ge 0$; 2) $1 - 2x < 0$.

106. *Ответ:* $x = 3$.

Указание. Записать уравнение в виде
$\sqrt{8x-7} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{7x-3} + \sqrt{3x-8}$.

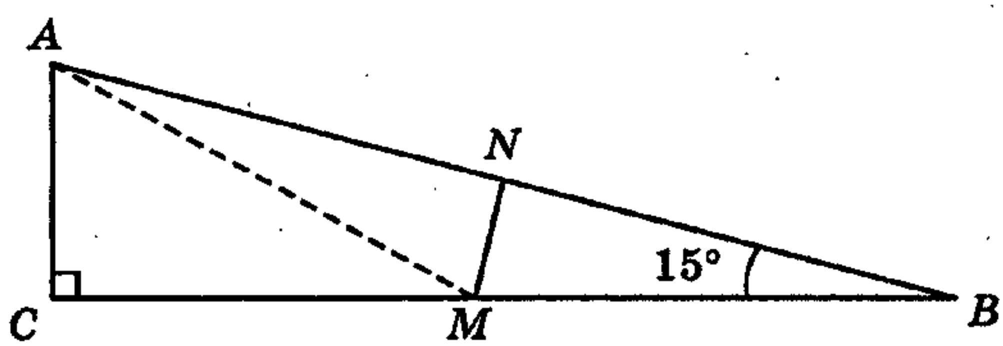
Такая форма записи обусловлена тем, что
$(8x - 7) + (2x - 4) = (7x - 3) + (3x - 8)$.
Это дает возможность значительно упростить уравнение.

107. *Решение.*

I способ

Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$. Проведем AM так, чтобы $\angle BAM = 15°$, тогда $\angle AMC = \angle MAB + \angle MBA = 30°$ (внешний угол ΔAMB), $AM = 2AC = 2b$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Значит, и $MB = 2b$.

Построим $MN \perp AB$, тогда $\Delta MNB \sim \Delta ACB$ и $\frac{MB}{AB} = \frac{BN}{BC}$, или $\frac{2b}{c} = \frac{c}{2a}$, откуда $ab = \frac{1}{4}c^2$, и так как $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$, то $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8}c^2$, ч. т. д.



II способ

$a = c\cos 15°$, $b = c\sin 15°$, тогда $S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin 15° \cos 15° = \frac{1}{4}c^2 \sin 30° = \frac{1}{8}c^2$, ч. т. д.

108. *Ответ:* $-3\frac{1}{8} < x < -2\frac{7}{8}$; $2\frac{7}{8} < x < 3\frac{1}{8}$.

109. *Ответ:* (3; 2).

Указание. Записать I уравнение системы в виде $x^2 - 2(2y - 1)x + (5y^2 - 8y + 5) = 0$.

Далее полученное уравнение рассмотреть как квадратное относительно x.

110. *Ответ:* 1089.

111. *Ответ:* $(4; +\infty)$.

112. *Ответ:* $a = 39$.

Указание. Обозначить корни уравнения $x_1 = m - d$, $x_2 = m$, $x_3 = m + d$.

Далее использовать метод неопределенных коэффициентов.

113. *Решение.* Если $a^2 + a + 1 = 0$, то

$$a + \frac{1}{a} = -1, \text{ тогда } a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 2 = -1;$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right) - \left(a+\frac{1}{a}\right) =$$

$$= -1 \cdot (-1) - (-1) = -2;$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right) - \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right) = -1;$$

$$a^5 + \frac{1}{a^5} = \left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right) - \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) = -1;$$

$$a^6 + \frac{1}{a^6} = 2, \quad a^7 + \frac{1}{a^7} = -1, \text{ и т. д.}$$

Из этих соотношений видно, что для показателей степени, кратных 3, значение выражения равно 2, а в остальных случаях равно −1. Поскольку 2010 кратно 3, то значение данного выражения равно 2.

Ответ: 2.

114. *Ответ:* $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

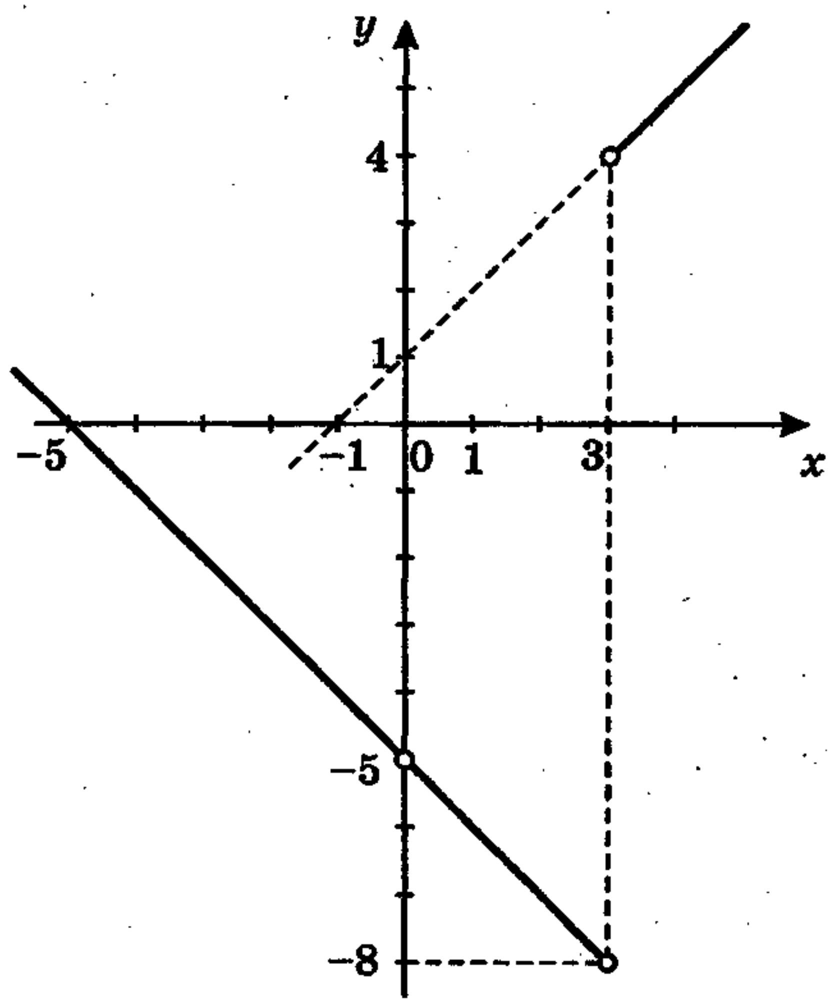
Указание. Записать неравенство в виде
$|3x + 1| > |\sqrt{3} + 1| - \sqrt{3}$, и т. д.

115. *Ответ:* при $a = -16$.

116. *Решение.* $y = \dfrac{(x-3)(x+3)}{|x-3|} + x^{2k-1-k+1} -$

$- x^k - 2 = \dfrac{(x-3)(x+3)}{|x-3|} - 2.$

D: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$ 1) $\begin{cases} x > 3, \\ y = x+1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 3, \\ y = -x-5. \end{cases}$



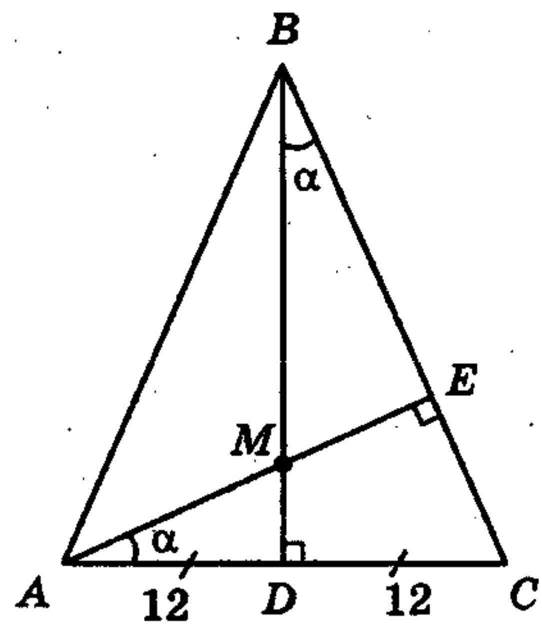
117. *Ответ:* $[-2\sqrt{2}; 0) \cup (0; 2\sqrt{2}]$.

118. *Решение.*

I способ

Пусть $\angle CBD = \angle CAE = \alpha$.

Из ΔAEC $EC = 24 \sin \alpha$. С другой стороны, $EC =$ $= BC - BE = \dfrac{12}{\sin \alpha} - 7 \cos \alpha$.



Получим уравнение $24 \sin \alpha = \dfrac{12}{\sin\alpha} - 7 \cos \alpha$,

или $24 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12 = 0$.

Учитывая, что $12 = 12(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$, имеем
$12 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12\cos^2 \alpha = 0$, или
$12 \operatorname{tg}^2 \alpha + 7 \operatorname{tg} \alpha - 12 = 0$, откуда
$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{4}{3}$.

Так как $0 < \alpha < 90°$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$, то $\operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{4}{3}$ не подходит. Из ΔAMD $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{MD}{AD} = \dfrac{MD}{12} = \dfrac{3}{4}$, откуда $MD = 9$, тогда $BD = 7 + 9 = 16$.

Значит, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = 192$.

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, где
$p = \dfrac{1}{2}(2AB + AC)$, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 20$, тогда

$p = \dfrac{1}{2}(40 + 24) = 32$ и $r = \dfrac{192}{32} = 6$.

Ответ: 6.

II способ

Из ΔABD $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Пусть $AB = y$, $MD = x$, тогда $y^2 = (7 + x)^2 + 144$. Из подобия ΔAEC и ΔBDE имеем $\dfrac{EC}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$, или $\dfrac{EC}{24} = \dfrac{12}{y}$.

Но $EC = y - BE$, тогда $\dfrac{y - EC}{24} = \dfrac{12}{y}$.

Заметим, что $\dfrac{BE}{BM} = \dfrac{BD}{y}$, или $BE = \dfrac{7(7+x)}{y}$.

$y - BE = \dfrac{1}{y}(y^2 - 49 - 7x)$, тогда $\dfrac{y^2 - 49 - 7x}{24y} =$ $= \dfrac{12}{y}$, или $y^2 = 7x + 337$.

Так как $y^2 = (7 + x)^2 + 144$, то получим
$(7 + x)^2 + 144 = 7x + 337$, откуда
$x_1 = 9$, $x_2 = -16$ (не подходит).
Если $x = 9$, то $BD = 7 + 9 = 16$, и т. д. (см. I способ).

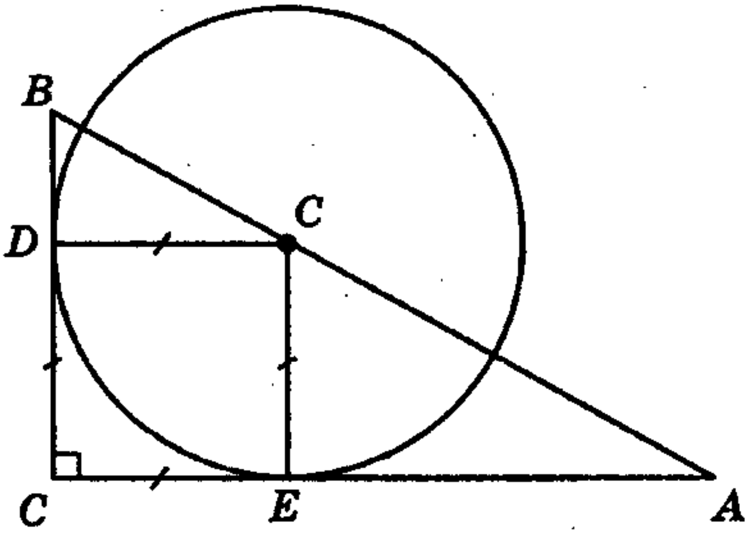
119. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 2$.

120. *Ответ:* $\left(\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{17}); -1\right) \cup (1; +\infty)$.

Указание. Преобразовать неравенство к виду $|x + 1| > 3 - x^2$. Далее рассмотреть два случая:
1) $x \geq -1$; 2) $x < -1$, и т. д.

121. *Решение.*

Пусть точка O — центр окружности, касающейся катетов AC и BC в точках, соответственно, E и D. Пусть $AC = x$, $BC = y$, $AE = b$, $BD = a$. Так как $BC \perp OD$, $AC \perp OE$ и $OE = OD = r$, то $CDOE$ —



квадрат, тогда $AC = b + r$, $BC = a + r$, т. е. $x = b + r$, $y = a + r$.

Из подобия ΔBDO и ΔBCA имеем $\frac{a}{r} = \frac{a+r}{b+r}$, откуда находим $ab = r^2$. (1)

Кроме того, $S_{\Delta ABC} = 56$, тогда $(a + r)(b + r) = 112$, или $ab + (a + b)r + r^2 = 112$.

Учитывая (1), имеем

$$2r^2 + (a + b)r = 112. \quad (2)$$

Согласно условию $7r = x + y$, или $a + b = 5r$, тогда (2) примет вид $2r^2 + 5r^2 = 112$, $r^2 = 16$, $r = 4$.

Ответ: 4.

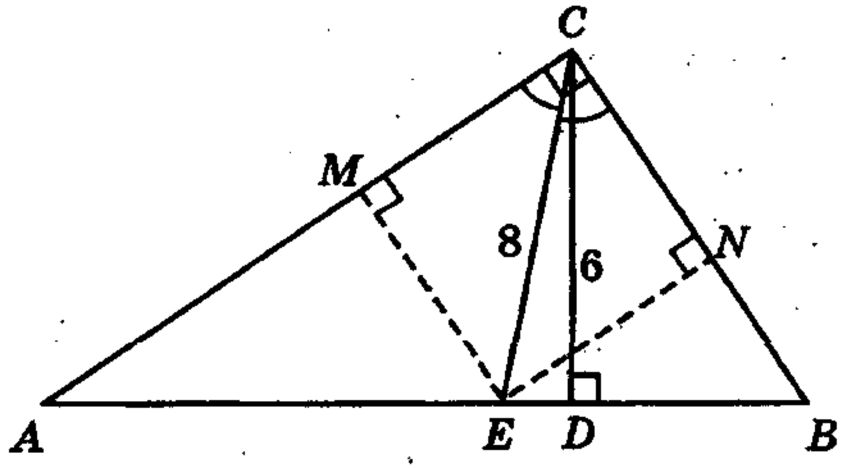
122. *Ответ:* $x = 3$.

Указание. Представить уравнение в виде $(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6})^2 + (\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}) = 20$. Далее замена $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = y$, где $y > 0$, и т. д.

123. *Ответ:* $(-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$.

124. *Решение.*

Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, CE — биссектриса, CD — высота. Из точки E опустим перпендикуляры EM и EN на катеты AC и BC. Поскольку CE — биссектриса, то $EN = EM$, тогда $EMCN$ — квадрат.



Из ΔCME, где $CE = 8$, находим $ME = \dfrac{CE}{\sqrt{2}} =$ $= 4\sqrt{2}$, $EN = ME = 4\sqrt{2}$. Пусть $BC = x$, $AC = y$. Тогда $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACE} + S_{\Delta CEB} = \dfrac{1}{2}y \cdot 4\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}x \cdot 4\sqrt{2} =$ $= 2\sqrt{2}(x + y)$. (1)

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}xy$. (2)

Сравнивая (1) и (2), имеем $2\sqrt{2}(x + y) = \dfrac{1}{2}xy$, или $32(x + y)^2 = x^2y^2$.

Наконец, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = 3\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}xy$, откуда $36(x^2 + y^2) = x^2y^2$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 32(x+y)^2 = x^2y^2, & (3) \\ 32(x+y)^2 = x^2y^2. & (4) \end{cases}$$

Заметим, что для нахождения искомой площади ΔABC нет необходимости находить в отдельности x и y.

Из уравнения (3) имеем $x^2 + y^2 = \dfrac{x^2y^2}{32} - 2xy$.

Из уравнения (4) находим $x^2 + y^2 = \frac{x^2y^2}{36}$.

Приравнивая правые части полученных равенств, получим

$\frac{x^2y^2}{32} - 2xy = \frac{x^2y^2}{36}$, или $x^2y^2\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{36}\right) = 2xy$,

$\frac{1}{8 \cdot 36}xy = 2$, откуда $xy = 2 \cdot 8 \cdot 36$.

Значит, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}xy = 8 \cdot 36 = 288$ (кв. ед.).

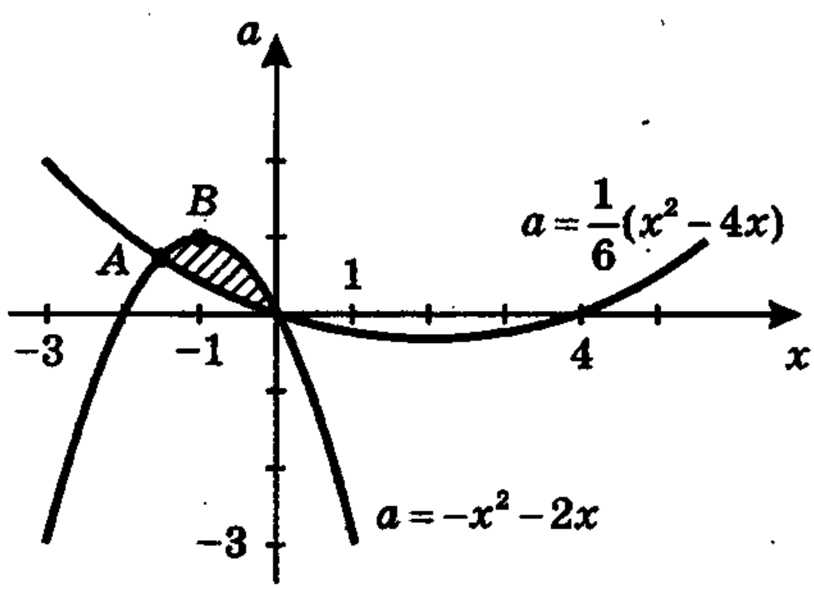
Ответ: 288.

125. *Ответ:* $[5; +\infty)$.

126. *Решение.*

На плоскости xOa изобразим параболы

$$a = -x^2 - 2x \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x).$$



Как видно из рисунка, точки, координаты которых удовлетворяют данной системе, лежат ниже параболы $a = -x^2 - 2x$ и выше параболы $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$.

Решая уравнение $-x^2 - 2x = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$, найдем абсциссы точек пересечения парабол:

$-6x^2 - 12x = x^2 - 4x$, или $7x^2 + 8x = 0$;

$x(7x + 8) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{8}{7}$.

Если $x_1 = 0$, то $a_1 = 0$; если $x_2 = -\frac{8}{7}$, то

$$a_2 = -\left(\frac{64}{49} - \frac{16}{7}\right) = -\frac{16}{7}\left(\frac{4}{7} - 1\right) = \frac{48}{49}.$$

Итак, параболы $a = -x^2 - 2x$ и $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$ пересекаются в точках $O(0; 0)$ и $A\left(-\frac{8}{7}; \frac{48}{49}\right)$. Заметим, что точка A расположена левее вершины первой параболы $B(-1; 1)$.

Горизонтальная прямая пересекает заштрихованную область по единственной точке, если она проходит через точки O и B, т. е. при $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ: при $a = 0$ и $a = 1$.

127. *Ответ:* $\frac{1}{8}(9\sqrt{3} + 3\sqrt{15})$ см^2.

128. *Ответ:* $1 < x \le 2$.

129. *Ответ:* при $a = -4$.

Указание. Данная система не имеет решений, если

$$\frac{6+a}{-4} = \frac{2}{a} \ne \frac{3+a}{1+a}.$$

130. *Указание.* Предварительно показать, что $8(a^7 + b^7 + c^7)^2 = 49a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2(a^4 + b^4 + c^4)$ и $25a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^5 + b^5 + c^5)^2$.

131. *Ответ:* существует, например, со сторонами 25; 38 и 51 ед.

132. *Ответ:* $\left(-3; \pm\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $(2; \pm\sqrt{2})$.

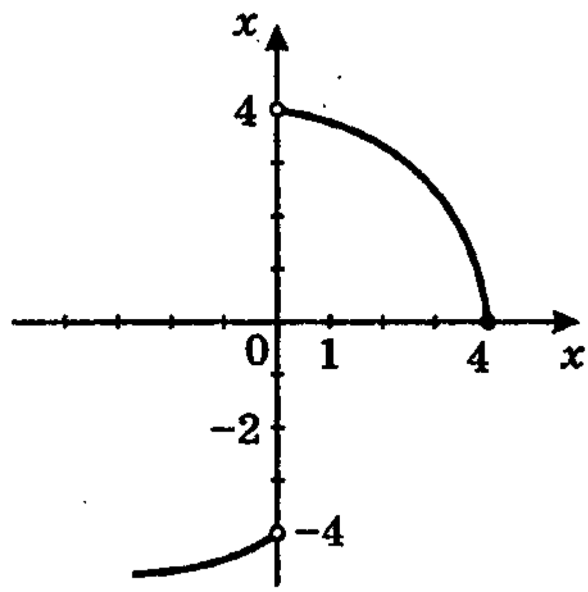
133. *Решение.* На продолжении отрезка BM за точку M возьмем точку D, так что $MD = CM$. Тогда ΔCDM правильный и $CD \parallel MN$.

Значит, $BM : MN = BD : DC = (BM + CM) : CM$, т. е. $\frac{1}{MN} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{BM}$.

134. *Решение.* D: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \leq 4. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ y = 2\sqrt{4-x}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ y = -2\sqrt{4-x}. \end{cases}$



135. *Решение.* Уравнение общей касательной запишем в виде $y = kx + b$. Следовательно, уравнения $x^2 - 6x + 8 = kx + b$ и $x^2 + x + 2 = kx + b$ должны иметь единственное решение, т. е. дискриминанты соответствующих квадратных уравнений

$$x^2 - (6 + k)x + 8 - b = 0 \text{ и } x^2 - (k - 1)x + 2 - b = 0$$

должны быть равны нулю:

$$D_1 = (6 + k)^2 - 4(8 - b) = 0 \text{ и}$$
$$D_2 = (k - 1)^2 - 4(2 - b) = 0.$$

Для нахождения значений k и b получим систему уравнений

$$\begin{cases} 36 + 12k + k^2 - 32 + 4b = 0, \\ k^2 - 2k + 1 - 8 + 4b = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 36 + 16k + 4 + 4b = 0, \\ k^2 + 2k - 7 + 4b = 0, \end{cases}$$

откуда $16k + 4 - (2k - 7) = 0$, $14k = -11$, $k = -\frac{11}{14}$,

тогда $\left(-\frac{11}{14}\right)^2 + 16 \cdot \left(-\frac{11}{14}\right) + 14 + 4b = 0$, или

$\frac{121}{196} - \frac{176}{14} + 4 + 4b = 0$, откуда находим $b = \frac{1559}{2744}$,

значит, $y = -\frac{11}{14}x + \frac{1559}{2744}$.

Ответ: $y = -\frac{11}{14}x + \frac{1559}{2744}$.

136. *Решение.* Так как $10 = 2 \cdot 5$, то нулей в числе 2010! будет столько же, сколько цифра 5 входит в разложение на простые множители этого числа. Заметим, что каждое пятое число делится на 5, значит, чисел от 1 до 2010, делящихся на 5, будет 402, на 25 — 80, на 125 — 16, на 625 — 3. Следовательно, 5 входит в разложение в $402 + 80 + 16 + 3 = 501$-й степени. Значит, в числе 2010! будет 501 нуль. Учитывая, что двойка входит в разложение в большей степени, чем 5, заключаем, что последняя его ненулевая цифра будет четной.

137. *Ответ:* $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Указание. Преобразовать уравнение к виду $|\cos 3x| = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$.

138. *Ответ:* при $m = \frac{5}{19}$ и $m = -25$.

139. *Ответ:* нет.

Указание. $y(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

$y(3) - y(1) = 24a + 4b$ — четное, а по условию должно быть нечетным.

140. *Ответ:* $(-2; 0)$.

Указание. Преобразовать неравенство к виду $\frac{x^2-4}{|x|-2} \ge x^2$. Далее рассмотреть 2 случая: 1) $x \ge 0$; 2) $x < 0$.

141. *Указание.* Возвести в куб и учесть, что $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$. Возможны и другие способы решения, например, замены

$x + 45 = a^3$, $x - 16 = b^3$.

142. *Решение.* Пусть a, b, c — стороны треугольника, причем $a < b < c$.

По условию $a + c = 2b$. (1)

Кроме того, $\frac{b}{\sin \angle B} = 2R$, откуда $b = 2R \sin R$.

$S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \frac{abc}{4R}$, или $\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R}$, тогда, учитывая (1), получим $ac = 6Rr$. (2)

По теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$, или $b^2 = (a + c)^2 - 2ac(1 + \cos \angle B)$,

$2ac(1 + \cos \angle B) = 3b^2$,

$12Rr\,(1 + \cos \angle B) = 3b^2$, или

$12Rr\,(1 + \cos \angle B) = 12R^2 \sin^2 \angle B$,

$r(1 + \cos \angle B) = R(1 - \cos \angle B)\,(1 + \cos \angle B)$.

Но $1 + \cos \angle B \ne 0$, т. е. $\angle B \ne 180°$, тогда

$r = R(1 - \cos \angle B)$, откуда $1 - \cos \angle B = \frac{r}{R}$.

По условию $\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, тогда $\cos \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle B = 30°$.

Ответ: $30°$.

143. *Ответ:* 1099.

144. *Указание.* Сложить уравнения системы и найти значение $x^2 + y^2$, после чего подставить в первое уравнение.

145. *Ответ:* $2\pi n$, $n \in Z$.

Указание. $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 7x = 1, \end{cases}$ и т. д.

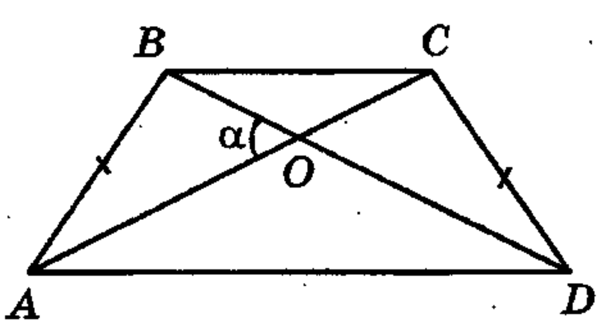
146. *Ответ:* 336.

Указание. Использовать формулы $R = \dfrac{abc}{4R}$ и $r = \dfrac{S}{p}$. Далее обозначить стороны треугольника $a = x$, $b = x + 2$, $c = x + 4$, тогда $\dfrac{abc}{4p} = \dfrac{x(x+4)}{6} = 130$, и т. д.

147. *Ответ:* $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}; \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)$.

148. *Указание.* Учесть, что $a^{2k} - 1$ делится на $a^2 - 1$.

149. Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $AC = BD = m$ и $\angle AOB = \alpha$, $AO = x$, $CO = y$.



Заметим, что
$S = 2S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} = 2 \cdot \dfrac{1}{2}xy \sin \alpha + \dfrac{1}{2}y^2 \sin (180° - \alpha) + \dfrac{1}{2}x^2 \sin (180° - \alpha) = xy \sin \alpha + \dfrac{1}{2}y^2 \sin \alpha +$

$+\dfrac{1}{2}x^2\sin\alpha = \dfrac{1}{2}(x+y)^2\sin\alpha = \dfrac{1}{2}m^2\sin\alpha,$

где $x + y = AC = BD = m$. Итак, $S = \dfrac{1}{2}m^2\sin\alpha$, ч. т. д.

150. *Ответ:* $(0; 0; 0)$, $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$.

151. *Решение.* Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Заметим, что $f(1)\cdot f(0) = (a + b + c)\cdot c < 0$.

Следовательно, на концах отрезка $[0; 1]$ функция принимает значения разных знаков, поэтому ее график пересекает ось Ox, а значит, дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$, т. е. $b^2 > 4ac$, ч. т. д.

152. *Ответ:* 4.

153. *Решение.*

I способ

Пусть b_1, b_2, b_3 — искомые числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию. Согласно условию, имеем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1^2(1+q+q^2)^2 = 676, \\ b_1^2(1+q^2+q^4) = 364. \end{cases}$$

Разделим почленно I уравнение на II:

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{13}{7}. \qquad (1)$$

Заметим, что $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2)^2 - q^2 =$
$= (1 + q^2 + q)(1 + q^2 - q)$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$\dfrac{1+q+q^2}{1+q^2-q} = \dfrac{13}{7}$, или $6q^2 - 20q + 6 = 0$,

$3q^2 - 10q + 3 = 0$, откуда находим $q_1 = 3$, $q_2 = \dfrac{1}{3}$.

Поскольку прогрессия возрастающая (по условию), то $q = 3$, тогда $b_1 = \dfrac{26}{1+q+q^2} = 2$.

Ответ: $b_1 = 2$, $q = 3$.

II способ

Известно, что если все члены геометрической прогрессии возвести в некоторую степень, то опять получим геометрическую прогрессию.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 26, \\ \dfrac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2} = 364. \end{cases}$$

Разделим почленно II уравнение полученной системы на I: $\dfrac{b_1(1+q^3)}{1+q} = 14$.

А теперь разделим I уравнение системы на полученное: $\dfrac{(1-q^3)(1+q)}{(1+q^3)(1-q)} = \dfrac{13}{7}$, или $\dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \dfrac{13}{7}$, и т. д. (см. I способ).

III способ

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \qquad \begin{cases} (b_1 + b_2 + b_3)^2 = 26^2, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + 2b_2b_3 = 676, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases}$$

$364 + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) = 676$, или
$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = 156$.
Но $b_2^2 = b_1b_3$, тогда $b_1b_2 + b_2^2 + b_2b_3 = 156$,

$b_2(b_1 + b_2 + b_3) = 156$. Так как $b_1 + b_2 + b_3 = 26$, то $b_2 = 156 : 26 = 6$, и т. д.

Ответ: $b_2 = 2$, $q = 3$.

154. *Ответ:* $x = -2$.

Указание. $(x - 1)^2 - 9 = x^3 + 8$.

155. *Ответ:* (1; 16).

Указание. Заменой $\sqrt{x} = y$, где $y \geq 0$, данное неравенство приводится к виду $\dfrac{(y-4)(y+1)}{(y+3)(y-1)} < 0$ и решается методом интервалов.

156. *Ответ:* $b_1 = 32$, $q = \dfrac{1}{3}$.

157. *Ответ:* например, $x = y = 4020$.

Указание. Записать уравнение в виде $(x - 2010)(y - 2010) = 2010^3$.

158. *Ответ:* $x_1 = 16$, $x_2 = 96$.

Указание. Заменой $\begin{cases} \sqrt[4]{97-x} = a, \\ \sqrt[4]{x-15} = b \end{cases}$ получим

$\begin{cases} a+b=4, \\ a^4+b^4=82 \end{cases}$ и т. д.

159. *Решение.*

I способ

Так как $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$, то исходное уравнение примет вид

$4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 3(\sin x + \cos x)$, или

$(\sin x + \cos x)(4 - 4\sin x \cos x - 3) = 0$,

$(\sin x + \cos x)(1 - 4\sin x \cos x) = 0$, откуда

$\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$,

или $1 - 2\sin 2x = 0$, $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

II способ

$4\cos^3 x - 3\cos x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Но $4\cos^3 x - \cos x = \cos 3x$ и $3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 3x$, тогда $\cos 3x = \sin 3x$, т. е. $\operatorname{tg} 3x = 1$, $3x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

160. *Ответ:* 0.

Указание. Возвести обе части равенства $a + b + c = 12$ в квадрат.

161. *Ответ:* в I раз 8 л спирта, во II раз — 7 л.

Указание. Согласно условию, имеем уравнение $(64 - x) - \dfrac{x(64 - x)}{64} = 49$, и т. д.

162. *Ответ:* $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1$.

Указание. Рассмотреть два случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$, и т. д.

163. *Решение.* Продолжим AD до пересечения с BC в точке E. Так как $\angle A = \angle B = 45°$, то $\angle AEB = 90°$, значит, ΔAEB равнобедренный и прямоугольный. Аналогично в ΔDEC $DE = EC$, $\angle EDC = \angle C = 45°$. Пусть $AE = BE = x$, $DE = CE = y$, тогда $S_{\Delta ABE} = \dfrac{1}{2} AE \cdot BE = \dfrac{1}{2}x^2$, $S_{\Delta DEC} = \dfrac{1}{2}y^2$.

Значит, $S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Но в ΔDEB $x^2 + y^2 =$ $= BD^2$, следовательно, $S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{2}BD^2$, ч. т. д.

164. *Ответ:* 91.

Указание. $10a + b = 10ab + k$; $10b + a = 2ab + k$, где k — остаток. Тогда, вычитая из I равенства II, получим $9a = b(8a + 9)$, и т. д.

165. *Ответ:* $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \geq 2$.

Указание. Привести уравнение к виду $|\sqrt{x-3} + 1| = \sin x + \sqrt{x-3}$.

166. *Ответ:* нет решений.

Указание. Левая часть уравнения $x^3 - x =$ $= (x - 1)x(x + 1)$ кратна 6.

167. *Решение.* Из первой точки можно провести $(n - 1)$ прямых линий ко всем остальным. Из второй точки можно провести $(n - 2)$ прямых линий, так как прямая, идущая к первой точке, уже учтена. Из третьей точки можно провести $(n - 3)$ прямых линий и т. д. Из последней точки нельзя будет провести ни одной прямой линии. Таким образом, число прямых линий представляет сумму членов арифметической прогрессии.

$S_n = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 3 + 2 + 1$, где $a_1 = n - 1$, $a_n = 1$ и число членов $(n - 1)$.

Тогда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot (n - 1) = \frac{(n-1+1)}{2} \cdot (n - 1) =$ $= \frac{n(n-1)}{2}$.

Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых.

168. *Ответ:* $x^{13} + x^{11} + 1 = (x^2 + x + 1)(x^{11} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Указание. Показать, что данный многочлен делится на $x^2 + x + 1$.

169. *Ответ:* (–2013; 0).

Указание. $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

170. *Ответ:* 1 см.

171. *Решение.* Данный многочлен представляет собой сумму шести членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1$, $q = x^2$, $b_n = x^{10}$.

По формуле суммы $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$ имеем

$$\frac{x^{10}\cdot x^2-1}{x^2-1} = \frac{x^{12}-1}{x^2-1} = \frac{(x^6-1)(x^6+1)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{(x^3-1)(x^3+1)((x^2)^3+1)}{x^2-1} =$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Ответ: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

172. *Ответ:* $x = 4$.

Указание. Левую часть уравнения записать в виде $x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$. Далее использовать формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

173. *Ответ:* $8\pi m$, $m \in Z$.

Указание. Учесть ограниченность косинуса.

174. *Решение.* Заметим, что $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, тогда многочлен $M(x)$ делится без остатка на $(x - 2)$ и $(x - 3)$. Согласно теореме Безу имеем

$$\begin{cases} M(2) = 8a + 4b - 146 + 102 = 0, \\ M(3) = 27a + 9b - 219 + 102 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 4b = 44, \\ 27a + 9b = 117; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 11, \\ 3a + b = 13, \end{cases}$$

откуда находим $a = 2$, $b = 7$.

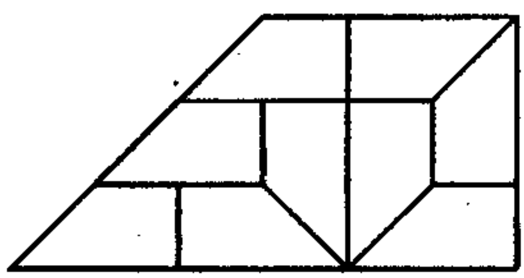
Ответ: $a = 2$, $b = 7$.

175. *Ответ:* (1; 1).

176. *Ответ:* $(-\infty; 2)$.

177. *Ответ:* 1) $x = 6$, $y = 2$, $z = 1$; 2) $x = 6$, $y = 1$, $z = 2$; 3) $x = 8$, $y = 3$, $z = 1$; 4) $x = 8$, $y = 1$, $z = 3$.

178. *Решение.*



179. *Ответ:* при $a = 2$ и $a = -1$.

Указание. Выразить из I уравнения x через y и подставить во II уравнение.

180. *Указание.* Записать уравнение в виде
$(x^2 - x - 2)^2 - 3^2 = x^3 + 1$.

181. *Ответ:* 9 учеников.

Указание. Пусть x — количество учеников, y — средний возраст учеников, тогда получим уравнение
$(xy + y + 40) : (x + 1) + 36 = y + 40$, и т. д.

182. *Ответ:* $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Указание. Заменой $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{x+1} = b$ исходное уравнение сводится к решению системы $\begin{cases} a^3 - b^3 = \frac{7}{8}, \\ \frac{a-b}{ab} = 1, \end{cases}$ откуда новой заменой $2ab = t$ получим уравнение $t^3 + 6t - 7 = 0$, корень которого $t = 1$, и т. д.

183. *Решение.* Поскольку скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой, то, обозначив через x время, пройденное часовой стрелкой, $12x$ — минутной, и, учитывая, что первоначально между стрелками было ровно 15 минут, получим уравнение

$12x = x + 15$, откуда $x = 1\frac{4}{11}$, тогда минутная догонит часовую через $15 + 1\frac{4}{11} = 16\frac{4}{11}$ мин.

Ответ: через $16\frac{4}{11}$ мин.

184. *Решение.* $\overline{abcde} = 45abcde$, тогда все цифры числа нечетные, в противном случае оно кратно 10, но тогда $e = 0$, значит, и само число равно 0. Значит, $e = 5$, следовательно, искомое число кратно 25 и $d = 7$ (2 — четное).

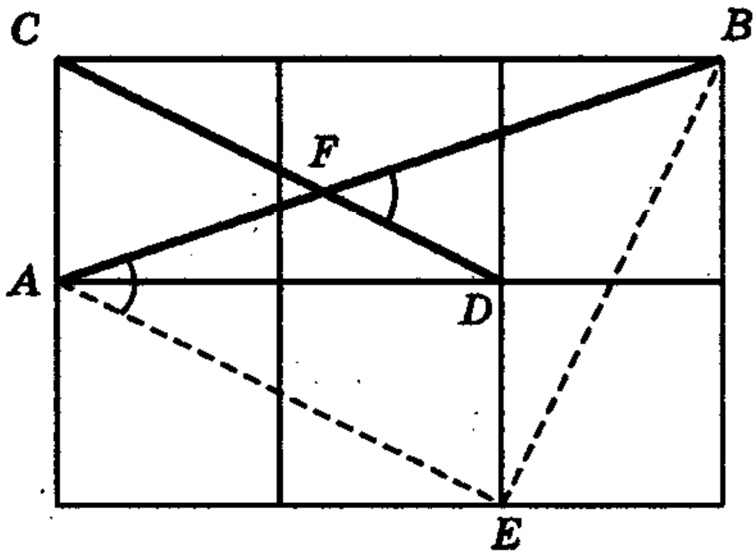
Заметим, что $a + b + c + 12$ делится на 9, тогда $a + b + c = 15$.

Кроме того, $45 \cdot 35 \cdot abc < 100\,000$, т. е. $abc \leq 63$, откуда подходит число 77 175.

Ответ: 77 175.

185. *Ответ:* (0; 1,5), (3; 0).

186. *Решение.* Пусть сторона квадрата равна x, тогда $AE = BE = x\sqrt{5}$ и $AB = \sqrt{5x^2+5x^2} = x\sqrt{10}$.



Из ΔABE, где $\angle BAE = \angle ABE = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, по теореме косинусов имеем $10x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2x\sqrt{5}\cos\beta$, т. е. $\cos\beta = 0$, откуда $\beta = 90°$, тогда $\angle BAE = \angle BFD = 45°$.

Замечание. Можно применить скалярное произведение векторов CD и AB.

Ответ: 45°.

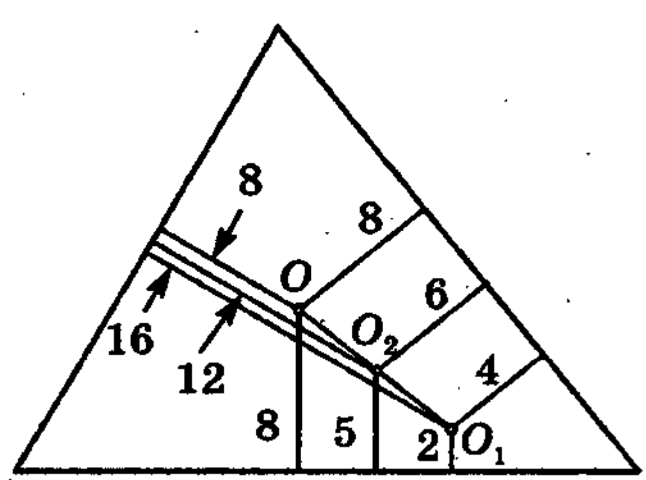
187. *Ответ:* через 144 суток.

188. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Заменой $\sqrt{1-\sqrt{x}} = 2y$ данное уравнение преобразуется к виду

$4(1 - 4y^2)^2 = (40 - 4y^2)(1 - 2y)^2$, и т. д.

189. *Решение.* Пусть O_1 и O_2 — данные точки, O — такая точка, при которой O_2 — середина OO_1. Согласно свойству средней линии трапеции, расстояния от точки O до сторон



треугольника будут равны соответственно $2 \cdot 5 - 2 = 8$; $2 \cdot 6 - 4 = 8$; $2 \cdot 12 - 16 = 8$. Учитывая, что отрезок OO_1 не может пересекать ни одной стороны треугольника, то точка O — центр окружности, вписанной в данный треугольник радиуса $r = 8$.

Ответ: 8.

190. *Ответ:* $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$.

191. *Ответ:* $\pi + 2\pi n$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

192. *Ответ:* (2; 1).

Указание. Разложить на множители левую часть I уравнения системы.

193. *Ответ:* $\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}$.

Указание. Ввести замену $\sqrt{x+1} = y$.

194. *Указание.* Имеет место тождество
$(x^3 + x + 1)(ax^2 + bx + c) = 2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n$.
Далее раскрыть скобки и сгруппировать слагаемые при одинаковых степенях. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $a = 2$, $b = -1$, $a + c = 0$, откуда $m = -3$, $n = -2$.

195. *Решение.* Заменой $x = y\sqrt{6}$ уравнение приводится к виду

$$\sqrt{6}\,y^3 - 2y\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 0, \text{ или } 3y^3 - y - 2 = 0.$$

Заметим, что $y = 1$ — корень полученного уравнения, тогда получим $3y(y^2 - 1) + 2(y - 1) = 0$, или $(y - 1)(3y^2 + 3y + 2) = 0$, откуда $y = 1$ — единственный корень полученного уравнения, так как уравнение $3y^2 + 3y + 2 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$). Итак, $y = 1$, тогда $x = y\sqrt{6} = \sqrt{6}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \sqrt{6}$.

196. *Решение.* Так как $x^2 = 2y^2 + 1$, то x — число нечетное. Пусть $x = 2m + 1$, тогда $2m(m + 1) = y^2$, откуда y — четное число. Но число 2 — единственное четное простое, значит, $y = 2$, тогда $x = 3$.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

197. *Ответ:* 30°, 30°, 120°.

198. *Ответ:* $x_1 = -1$, $x_2 = 8$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $x^3 \neq 0$ и ввести замену $x - 5 - \frac{8}{x} = y$.

199. *Решение.* Пусть x, y — катеты, z — гипотенуза, причем $x \le y \le z$.

По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$, значит, $x^2y + y^3 = z^2y$, тогда $x^3 + y^3 \le x^3y + y^3 = z^3y < z^3$.

Следовательно, $x^3 + y^3 < z^3$, т. е. куб гипотенузы больше суммы кубов катетов.

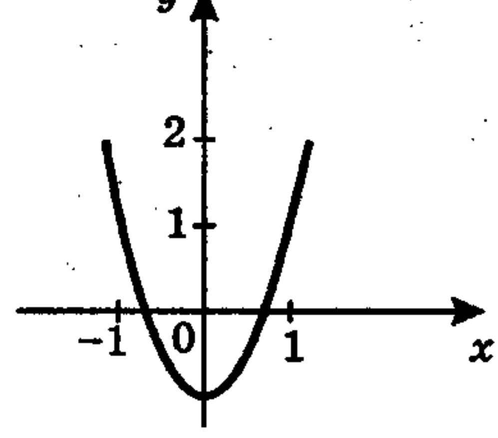
200. *Ответ:* $x_{1,2} = \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{7})$.

201. *Ответ:* (0; 0), (−9; 3), (3; 1), (−12; 6).

Указание. Записать систему в виде $\begin{cases} x = \frac{2}{3}xy + y^2, \\ 2y - \frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x^2, \end{cases}$

а затем почленно сложить.

202. *Указание.* После преобразования получим $y = 2x^2 - 1$.



203. *Ответ:* $x = -\sqrt{7}$, $y = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Указание. Представить уравнение в виде

$(x + \sqrt{7})^2 + \left(y - \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 0.$

204. *Ответ:* $x_1 = \dfrac{1}{6}(1 + \sqrt{13})$, $x_2 = \dfrac{1}{9}$.

Записать уравнение в виде $3\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right) + 9\left(x + \dfrac{1}{9x}\right) - 8 = 0$ и затем ввести замену

$\sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} = t.$

205. *Ответ:* $x = 5$.

206. *Ответ:* (4; 1), (1; 4).

207. *Решение.* Если x_1 и x_2 — корни трехчлена, то по теореме Виета имеем $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{p^2}. \end{cases}$

Тогда $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - \dfrac{2}{p^2}$;

$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = p^4 + \dfrac{2}{p^4} - 4;$

$x_1^6 + x_2^6 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) =$

$= \left(p^4 + \dfrac{2}{p^4} - 4\right)\left(p^2 - \dfrac{2}{p^2}\right) - \dfrac{1}{p^4}\left(p^2 - \dfrac{2}{p^2}\right) =$

$= p^6 - \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{9}{p^2} - 6p^2;$

$$x_1^8 + x_2^8 = (x_1^6 + x_2^6)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2^2 (x_1^4 + x_2^4) =$$
$$= \left(p^6 - \frac{2}{p^6} + \frac{9}{p^6} - 6p^2\right)\left(p^2 - \frac{2}{p^2}\right) - \frac{1}{p^4}\left(p^4 + \frac{2}{p^4} - 4\right) =$$
$$= \left(p^8 + \frac{2}{p^8}\right) - 8\left(p^4 + \frac{2}{p^4}\right) + 20.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем

$$x_1^8 + x_2^8 = \left(p^8 + \frac{2}{p^8}\right) - 8\left(p^4 + \frac{2}{p^4}\right) + 20 \geq$$
$$\geq 2\sqrt{p^8 \cdot \frac{2}{p^8}} - 8\sqrt{p^4 \cdot \frac{2}{p^4}} + 20 = 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} +$$
$$+ 20 = 20 - 6\sqrt{2} > 11,$$ ч. т. д.

208. *Ответ:* $x = -1$.
Указание. Рассмотреть 3 случая:
1) $x < -2$; 2) $-2 < x < \frac{4}{3}$; 3) $x > \frac{4}{3}$.

209. *Решение.* Запишем уравнение в виде
$(x - 2\cos(xy))^2 + 4(1 - \cos^2(xy)) = 0$, или
$(x - 2\cos(xy))^2 + (2\sin(xy))^2 = 0$, откуда
$x - 2\cos(xy) = 0$ и $\sin(xy) = 0$,
т. е. $x - 2\cos(xy) = 0$ и $\cos(xy) = \pm 1$.
Имеем 2 системы:

1) $\begin{cases} x - 2\cos(xy) = 0, \\ \cos(xy) = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ xy = 2\pi n; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = \pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$

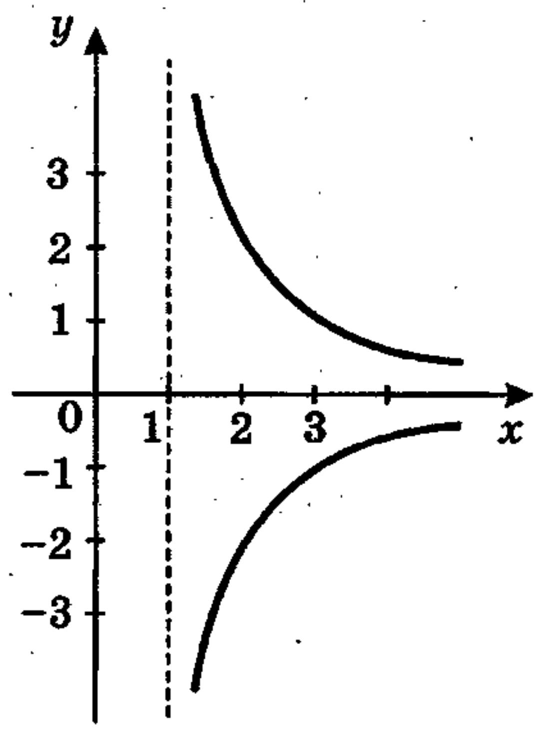
2) $\begin{cases} x - 2\cos(xy) = 0, \\ \cos(xy) = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2, \\ xy = \pi + 2\pi k; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$

210. *Ответ:* при $a = 2019$, $b = 12\,078$.

Указание. $x^2 + 7x^2 + ax + b = (x^2 + x + 2013)(x + c)$. Далее применить метод неопределенных коэффициентов.

211. *Решение.* $x \neq 0$, $x \neq 1$.



$$|y| = \frac{3 \cdot 1 - 1}{x-1} = \frac{2}{x-1}.$$

1) $\begin{cases} y > 0, \\ y = \dfrac{2}{x-1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y < 0, \\ y = \dfrac{2}{1-x}. \end{cases}$

212. *Ответ:* при $a = 3$.

213. *Решение.* Пусть $M(0;\, y)$ — точка на оси Oy. Уравнение касательной имеет вид $y = ax + b$. В точке касания дискриминант D квадратного уравнения равен нулю, т. е.

$x^2 - 4x + 7 = ax + b$, или $x^2 - (a + 4)x + 7 - b = 0$.

Имеем $D = (a + 4)^2 - 4(7 - b) = 0$, или

$$a^2 + 8a + (4b - 12) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) должно иметь корни a_1 и a_2, такие, что $a_1 \cdot a_2 = -1$ — условие перпендикулярности данных прямых, a_1 и a_2 — угловые коэффициенты.

Но $a_1 \cdot a_2 = 4b - 12$, тогда $4b - 12 = 1$, $b = \dfrac{11}{4}$, и на оси Oy получили точку $M\left(0; \dfrac{11}{4}\right)$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{11}{4}\right)$.

214. *Ответ:* $x = -1$.

215. *Указание.* Учесть, что $\sin 540° = \sin(3 \cdot 180°) = 0$, тогда уравнение после упрощений примет вид $\frac{|x|}{3} = \frac{1}{2}x^2$.

Далее рассмотреть два случая, после чего находим $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$.

216. *Ответ:* 6,25.

217. *Ответ:* 8.

Указание. Если x, y, z — стороны треугольника, r — радиус вписанной окружности, то задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} rx = 214, \\ ry = 208, \\ rz = 240. \end{cases}$

Далее применить формулу Герона.

218. *Ответ:* при $\alpha = 60°$.

219. *Ответ:* 6.

220. *Ответ:* –6.

Указание. Привести уравнение к виду

$$\left(x+15+\frac{36}{x}\right)\left(x+13+\frac{36}{x}\right) = 3.$$

Далее замена $y = x + \frac{36}{x}$.

221. *Решение.* Допустим, что уравнение имеет рациональный корень $x_0 = \frac{m}{n}$, причем $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^5 - p \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^3 + 1 = 0.$ (1)

Умножим обе части (1) на n^3:

$$\frac{m^5}{n^2} - pm^3 + n^3 = 0, \text{ или } \frac{m^5}{n^2} = pm^3 - n^3. \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, то и $\frac{m^5}{n^2}$ — несократимая дробь, тогда как правая часть (2) есть целое число.

Следовательно, равенство (2) не может выполняться, а это и означает, что наше допущение неверно, т. е. исходное уравнение не имеет рациональных корней.

222. *Ответ:* 210.

223. *Решение.* Пусть $y = \frac{1-\sqrt{2x^2-5x+4}}{5x-2x^2-3}$, или $y = \frac{\sqrt{2x^2-5x+4}-1}{2x^2-5x+3} = \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+4}+1}$ (здесь мы знаменатель дроби представили в виде

$(2x^2 - 5x + 4) - 1$ и разложили на множители).

Пусть $2x^2 - 5x + 4 = t$, где $t > 0$ при всех $x \in R$, так как $D = -7 < 0$ и $a = 2 > 0$.

Следовательно, $E(t) \in (0; +\infty)$.

Заметим, что функция $f(x) = f(t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}+1}$ убывающая, тогда свое наибольшее значение она получит при наименьшем значении t, т. е. при $x = -\frac{b}{2a} = 1\frac{1}{4}$.

Так как ближайшими к $x = 1\frac{1}{4}$ целыми числами будут 0 и 2 (при $x = 1$ функция не определена), то $y(0) = \frac{1}{3}$ и $y(2) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Но $y(2) > y(0)$, следовательно, исходное выражение имеет наибольшее значение при $x = 2$.

Ответ: 2.

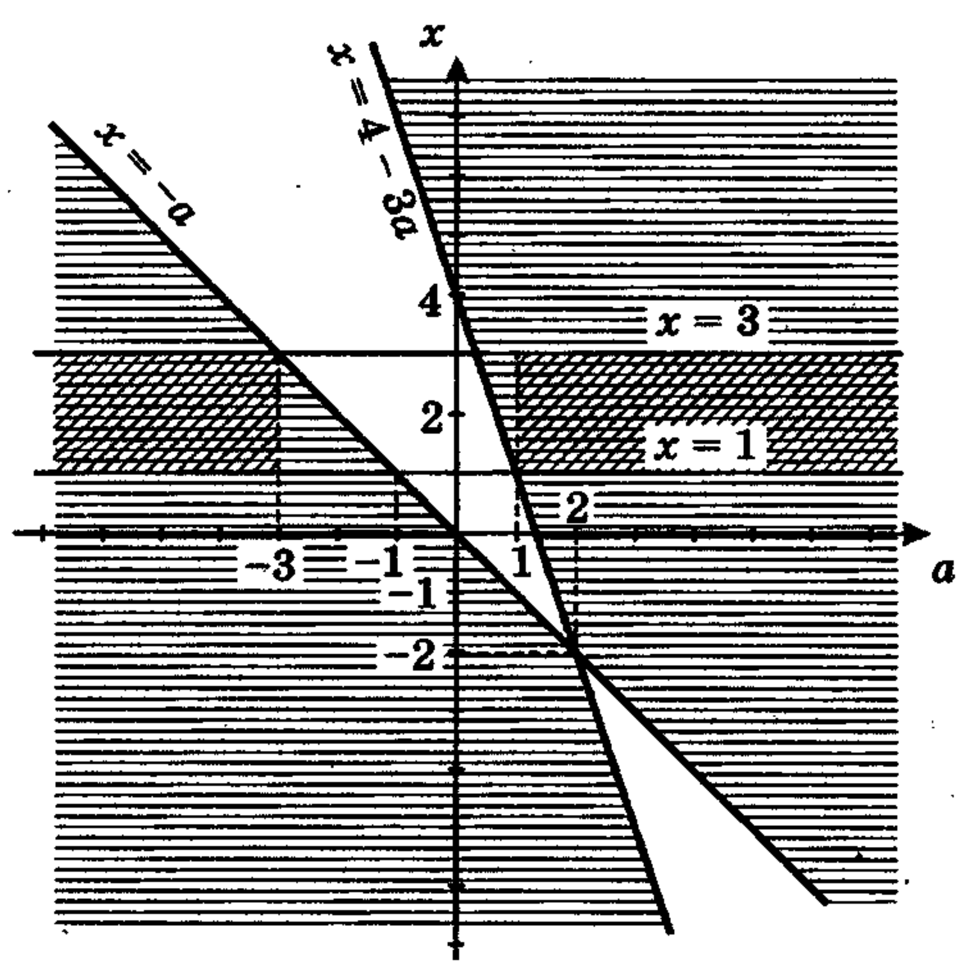
224. *Ответ:* (0; 0), (±2; ±1), $(\pm\sqrt[4]{2};\ \pm2\sqrt[4]{2})$.

Указание. Пара (0; 0) — решение системы. Пусть $xy \neq 0$, тогда, перемножив обе части системы, а затем разделив на $x^3y^3 \neq 0$, получим

$$8\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^3}{x^3}\right)=99.$$

Далее замена $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t$. В результате упрощений получим $\frac{x}{y}=2$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, затем подстановкой во II уравнение исходной системы, и т. д.

225. *Решение.* В координатной системе Oax отметим штриховкой все точки $(a;\ x)$, координаты



которых удовлетворяют указанным неравенствам (двойной штриховке соответствуют те точки, у которых $x \in [1; 3]$). Из рисунка видно, что только при $a < -3$ и $a > 1$ полоса $1 \leq x \leq 3$ целиком принадлежит заштрихованной области.

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

226. *Ответ:* 16.

227. *Указание.* Преобразовать данное выражение к виду $\frac{1}{6}(m+2)(m+3)(m+4)$, откуда и следует требуемое.

228. *Решение.* Упростим II уравнение системы

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}=5. \qquad (1)$$

Заметим, что I квадратный корень — это расстояние от точки координатной плоскости с координатами $C(x, y)$ до точки с координатами $M(2; 3)$, а II корень — расстояние от точки $C(x, y)$ до точки $N(-1; 7)$. Кроме того, $MN = \sqrt{(-1-2)^2+(7-3)^2} = 5$.

Следовательно, уравнение (1) имеет геометрический смысл: решением этого уравнения являются такие пары чисел $(x; y)$, для которых геометрическое место точек с координатами $C(x, y)$ на координатной плоскости задано равенством $MC + CN = MN$. Очевидно, что лишь точки отрезка AB и только они образуют геометрическое место точек. Упростим теперь I уравнение системы:

$$(x-4)^2+(y-6)^2=26. \qquad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение окружности с центром $(4; 6)$ и радиусом $\sqrt{26}$. Найдем точки пересечения отрезка MN с окружностью (2).

Уравнение прямой MN имеет вид $y = kx + b$. Поскольку точки M и N принадлежат прямой, то координаты точек должны удовлетворять прямой $y = kx + b$, т. е. имеем

$$\begin{cases} 2x + b = 3, \\ -x + b = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}, \\ b = \dfrac{17}{3}. \end{cases}$$

Тогда уравнение прямой примет вид

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{17}{3}. \qquad (3)$$

Подставим значение y из (3) в уравнение окружности (2):

$(x - 4)^2 + \left(-\dfrac{4}{3}x + \dfrac{17}{3} - 6\right)^2 = 26$, или

$(x - 4)^2 + \dfrac{(4x+1)^2}{9} = 26$, $25x^2 - 64x - 89 = 0$,

откуда находим $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{89}{25}$, тогда $y_1 = 7$,

$y_2 = \dfrac{23}{25}$.

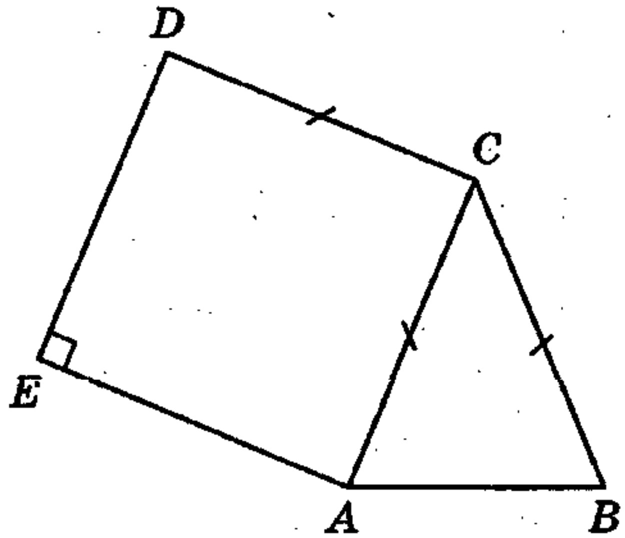
Заметим, что из полученных точек лишь точка с абсциссой $x = -1$ и ординатой $y = 7$ будет принадлежать отрезку AB. Значит, пара $(-1; 7)$ является решением исходной системы уравнений.

Ответ: $(-1; 7)$.

229. *Ответ:* $(1; 2)$, $(-1; 0)$, $(2; 4{,}5)$, $(-2; 0{,}5)$.

230. *Решение.* Пусть $AC = BC = CD = x$.
По условию $x^2 = 4S_{\Delta ABC}$. (1)

Но $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC \sin \angle C = \dfrac{1}{2}x^2 \sin \angle C$.



Учитывая (1), получим $x^2 = 2x^2 \sin \angle C$, $x \neq 0$, $\sin \angle C = \dfrac{1}{2}$, откуда $\angle C = 30°$, тогда $\angle A = \angle B = 75°$.

По следствию из теоремы синусов $\dfrac{AB}{\sin \angle C} = 2R$, откуда $R = \dfrac{y}{2 \cdot \frac{1}{2}} = y$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r$, где $p = \dfrac{1}{2}(2x + y)$, тогда

$$r = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{x^2}{2(2x+y)}, \quad \frac{R}{r} = \frac{2y(2x+y)}{x^2}. \qquad (2)$$

Но $\cos \angle A = \dfrac{0{,}5y}{x} = \cos 75°$, или $y = 2x \cos 75°$, тогда (2) примет вид

$$\frac{R}{r} = 8 \cos 75° \cdot (1 + \cos 75°). \qquad (3)$$

Но $\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$, тогда (3) примет вид $\dfrac{R}{r} = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)\right) =$

$= (\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} +$
$+ 4 = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$

Ответ: $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$.

231. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$$\left(\frac{x^3-2}{x+2}+3\right)-\left(\frac{13x+4}{x^2-10}+x\right)=0,$$

$$\frac{x^3+3x+4}{x+2}-\frac{x^3+3x+4}{x^2-10}=0.$$

В таком представлении и заключается идея решения. Далее имеем

$$(x^3+3x+4)\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-10}\right)=0,$$

$x \neq -2$, $x \neq \pm\sqrt{10}$.

$(x^3 + 3x + 4)(x^2 - x - 12) = 0$, или

$(x + 1)(x^2 - x + 4)(x - 4)(x + 3) = 0$, откуда получим $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.

Уравнение $x^2 - x + 4 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.

232. *Ответ:* 24.

Указание. Обозначить $\sqrt{x-144} = y$, и т. д.

233. *Решение.* При $a = b$ получим тождество. Пусть $a \neq b$. Так как $a^2b^2 = a + b$, то $a^2b^2(a - b) =$
$= (a + b)(a - b)$, или $a^3b^2 - a^2b^3 = a^2 - b^2$. (1)

Прибавим к обеим частям (1) $a^2b^2 \neq 0$:

$a^3b^2 - a^2b^3 + a^2b^2 = a^2 - b^2 + a^2b^2$, или

$a^2(b^3 + b^2 + 1) = b^2(a^3 + a^2 + 1)$, откуда

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^3+a^2+1}{b^3+b^2+1},$$ ч. т. д.

234. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$(x-6)^2-1+(x-5)^3+(x-4)^4-1=0$, или

$(x-7)(x-5)+(x-5)^3+(x^2-8x+16-1)(x^2-8x+16+1)=0$,

$(x-7)(x-5)+(x-5)^3+(x-5)(x-3)(x^2-8x+17)=0$,

$(x-5)(x-7+x^2-10x+25+(x-3)(x^2-8x+17))=0$,

$(x-5)((x-3)(x-6)+(x-3)(x^2-8x+17))=0$,

$(x-5)(x-3)(x^2-7x+11)=0$, откуда $x_1=5$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{5})$.

Ответ: $x_1=5$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{5})$.

235. *Ответ:* $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

236. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(n)=\left(\frac{7}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Далее установить, что неравенство выполняется при $n\geq 4$.

237. *Решение.* Заметим, что на основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем

$$\sqrt{x^4+x^3-2x^2+2x-1}\leq\frac{1}{2}(x^4+x^3-2x^2+2x),$$

$$\sqrt{3x^2-x^4-x^3}\leq\frac{1}{2}(3x^2-x^4-x^3+1).$$

Тогда $\sqrt{x^4+x^3-2x^2+2x-1}+\sqrt{3x^2-x^4-x^3}\leq\frac{1}{2}(x^2+2x+1)$.

Следовательно, и правая часть исходного уравнения удовлетворяет условию

$\frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 3) \le \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$, или

$2x^2 - 4x + 2 \le 0$, $x^2 - 2x + 1 \le 0$, $(x - 1)^2 \le 0$, откуда $x = 1$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

238. *Решение.* Пусть в ΔABC $CD = 4$ — высота, AB — основание, $AD : DB = 1 : 2$, $r = \dfrac{18}{7+\sqrt{13}}$ — радиус вписанной окружности.

Пусть $AD = x$, $DB = 2x$, $x > 0$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 4 = 6x$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(3x + AC + BC)$, тогда имеем

$6x = \dfrac{9(3x + AB + BC)}{7+\sqrt{13}}$, или

$2(7 + \sqrt{13})x = 3(3x + AB + BC)$.

Из ΔADC $AC = \sqrt{x^2+16}$,

из ΔCDB $BC = \sqrt{4x^2+16} = 2\sqrt{x^2+4}$.

Получим уравнение $2(7 + \sqrt{13})x =$

$= 3(3x + \sqrt{x^2+16} + 2\sqrt{x^2+4})$, или

$(5 + 2\sqrt{13})x = 3(\sqrt{x^2+16} + 2\sqrt{x^2+4})$.

Возведя обе части в квадрат и упрощая, получим

$((8 + 5\sqrt{13})x^2 - 72)^2 = (9\sqrt{(x^2+4)(x^2+16)})^2$, или

$(8 + 5\sqrt{13})^2x^2 - 144(8 + 5\sqrt{13}) = 81x^2 + 1620$,

$(308 + 80\sqrt{13})x^2 = 9(308 + 80\sqrt{13})$, откуда

$x^2 = 9$, $x = 3$.

Итак, $AD = 3$, $DB = 2x = 6$, тогда $AB = 3 + 6 = 9$.
Ответ: 9.

239. *Ответ:* $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1) \cdot$
$\cdot (x^4 - x^2 + 1)$.

240. *Решение.* I слагаемое в левой части уравнения есть среднее геометрическое $4x^3 + 3x^2 + 2$ и 1, т. е.

$$\sqrt{1\cdot(4x^3+3x^2+2)} \le \frac{1}{2}((4x^3 + 3x^2 + 2) + 1), \text{ или}$$

$$\sqrt{4x^3+3x^2+2} \le \frac{1}{2}(4x^3 + 3x^2 + 3). \qquad (1)$$

Аналогично $\sqrt{2x^2-4x^3+4x-1} \le$

$$\le \frac{1}{2}(2x^2 - 4x^3 + 4x). \qquad (2)$$

Складывая почленно (1) и (2) получим

$$\sqrt{4x^3+3x^2+2} + \sqrt{2x^2-4x^3+4x-1} \le$$
$$\le \frac{1}{2}(5x^2 + 4x + 3).$$

Следовательно, и правая часть исходного неравенства должна удовлетворять условию

$$3x^2 + 3x + 2 \le \frac{1}{2}(5x^2 + 4x + 3) \text{ или } x^2 + 2x + 1 \le 0,$$

$(x + 1)^2 \le 0$, откуда $x = -1$.
Ответ: -1.

241. *Ответ:* $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{5}{16}\right)$.

242. *Ответ:* $5\sqrt{41}$.

243. *Решение.* Преобразуем уравнение системы:

$$12\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}+\frac{5}{12z}\right)\cdot 12\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{5z}{12}\right) = 144,$$

$$\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}\right)(4x + 3y + 5z) = 144, \text{ или}$$

$$12\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+20\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+15\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=94. \qquad (1)$$

Но $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$, тогда (1) выполняется при условии, что $x = y = z = 2$.

При этих значениях II уравнение исходной системы примет вид

$$x^3 + 2x^2 + 3x = 22. \qquad (2)$$

Так как число 2 удовлетворяет (2), то

$x^2(x-2) + 4x(x-2) + 11(x-2) = 0$, или

$(x-2)(x^2 + 4x + 11) = 0$, откуда $x = 2$ — единственный корень уравнения (2), так как уравнение $x^2 + 4x + 11 = 0$ не имеет действительных корней.

Итак, исходная система имеет единственное решение (2; 2; 2).

Ответ: (2; 2; 2).

244. *Ответ:* $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. Использовать подобие ΔBEC и ΔAED, а затем теорему косинусов в ΔABE.

245. *Решение.* Обозначим данное выражение буквой A,

$$A=\frac{1\cdot4\cdot6\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots)}{1\cdot2\cdot3\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots)}=\frac{1\cdot4\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=4=2^2.$$

246. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Указание. Заменой $y = \sqrt[3]{7x-6}$ уравнение преобразуется в систему $\begin{cases}x^3+6=7y,\\ y^3+6=7x,\end{cases}$ которая легко решается вычитанием.

247. *Ответ:* $CD = \sqrt{113-64\sqrt{3}} \approx 1{,}5$ см.

248. *Ответ:* 3,36.

Указание. Использовать свойство касательной к окружности и формулу Герона.

249. *Ответ:* нет корней.

250. *Решение.* Пусть $x = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{40} = y + z$, где $y^3 = 25$, $z^3 = 40$ и $yz = \sqrt[3]{25\cdot 40} = \sqrt[3]{10^3} = 10$.

Тогда $x^3 - 30x = x(x^2 - 30) = (y + z)(y^2 + 2yz + z^2 - 3yz) = (y + z)(y^2 - yz + z^2) = y^3 + z^3 = 25 + 40 = 65$.

Ответ: 65.

251. *Ответ:* 1) $a = -7$, $b = -1$; 2) $a = -12$, $b = -2$.

252. *Ответ:* $(-4; 16)$, $(3, 9)$.

Указание. Если числа m, x_1, x_2 и n образуют геометрическую прогрессию, то

$$\begin{cases} x_1^2 = mx_2, \\ x_2^2 = x_1 n; \end{cases} \quad m = \frac{x_1^2}{x_2},\ n = \frac{x_2^2}{x_1}.$$

Далее применить теорему Виета.

253. *Решение.* Заметим, что $\operatorname{tg} 127^\circ 30' = -\operatorname{tg} 52^\circ 30'$.

Так как $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$, то $\operatorname{tg} 127^\circ 30' =$

$$= \frac{\cos(45^\circ+60^\circ)-1}{\sin(45^\circ+60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}-1}{\frac{\sqrt{6}}{4}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

$= \dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{1-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{3} -$

$- 2\sqrt{2})(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}.$

Тогда исходное выражение примет вид

$\mathrm{tg}\, 127° 30' + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} +$

$+ \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -2$, ч. т. д.

254. *Ответ:* $x = 4$.

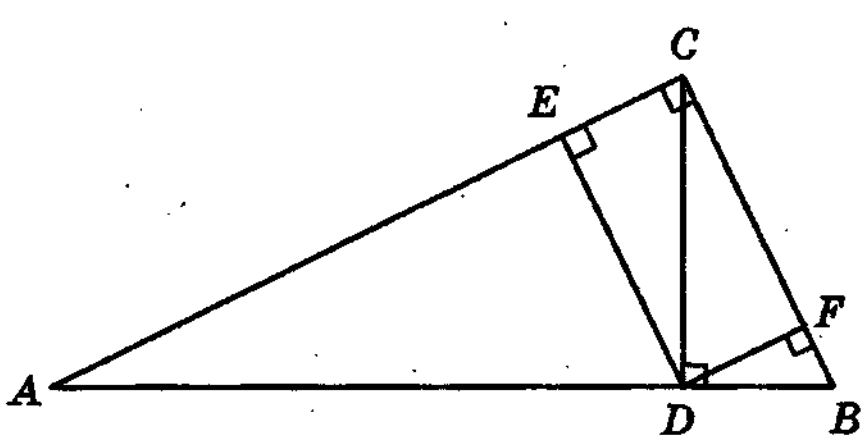
Указание. Умножить обе части уравнения на x, а затем разделить на $(x - 3)^3 \neq 0$. Далее замена $\dfrac{\sqrt{x}}{x-3} = y$, и т. д.

255. *Ответ:* $\sqrt{mn}$.

256. *Решение.* Известно, что $r = \dfrac{1}{2}(AC + BC -$

$- AB)$, тогда $r_1 = \dfrac{1}{2}(AE + DE - AD)$ и

$$r_2 = \frac{1}{2}(DF + FB - DB).$$



Складывая полученные равенства, имеем

$r_1 + r_2 = \dfrac{1}{2}((AE + DF) + (DE + FB) - (AD +$

$+ DB)) = \frac{1}{2}((AE + EC) + (CF + FB) - AB) =$

$= \frac{1}{2}(AC + CB - AB) = r$, ч. т. д.

257. *Ответ:* $2(x^2 + y^2)(x^4 + 5x^2y^2 + y^4)$.

258. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Учесть, что $\frac{27}{2x+7} = \frac{6(x+8)}{2x+7} - 3$.

259. *Ответ:* $\frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2)$.

260. *Решение.* Легко показать, что $p = 2R + r$, где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр, тогда $S = pr = (2R + r)r = 2Rr + r^2$.

Следовательно, $S + R^2 = (2Rr + r^2) + R^2 = (R + r)^2$, или $R + r = \sqrt{S+R^2}$, откуда $r = \sqrt{S+R^2} - R$, ч. т. д.

261. *Ответ:* $\frac{1}{3}(\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})$.

262. *Ответ:* $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{4}{7}$.

Указание. Решить заменой $y = 7x^2 + 7x + 4$. Далее применить способ группировки.

263. *Ответ:* $x_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2012} \pm \sqrt{2016})}$,

$$x_3 = \sqrt[6]{2012}.$$

Указание. Заменой $\sqrt{2012} = a$, где $a > 0$, исходное уравнение приводится к виду

$x^9 - (a^2 + 1)x^3 + a = 0$, или $x^3a^2 - a + (x^3 - x^9) = 0$.

Далее полученное уравнение решаем как квадратное относительно a.

264. *Ответ:* $x = 1$.

265. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Представить уравнение в виде

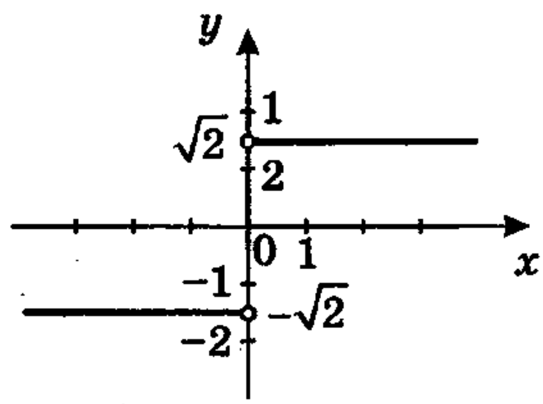
$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} = \frac{7}{2}.$$

Далее замена $\sqrt{\dfrac{7x+2}{x+2}} = y$, и т. д.

266. *Ответ:* на 50.

267. *Указание.* Выразить левую часть через первый член и знаменатель прогрессии, и т. д.

268. *Ответ:* (см. рис.).



269. *Указание.* Преобразовать уравнение к виду

$(x - z)^2 + (x + y - 1)^2 +$

$+ (x - y + 3)^2 = 0$, откуда находим $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$.

270. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Обозначить $\sqrt[3]{x} = t$.

271. *Решение.* Заметим, что $x \neq 0$, тогда

$(x + 19) = (x - 1)!$

Пусть $x - 1 = y$, тогда $x = y + 1$ и $y + 20 = y!$ (1)

Очевидно, что $y = 4$ — корень уравнения (1). Учитывая, что $y!$ возрастает быстрее, чем $y + 20$, то при $y > 4$ уравнение (1) корней не имеет. Следовательно, $y = 4$ — единственный корень (1), тогда

$x = y + 1 = 5$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 5$.

272. *Ответ:* при $a = 1$.

273. *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = -2$.

Указание. Показать, что если $x + \frac{1}{x} = y$, то $x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y$, где $y \neq 0$. Далее решить уравнение $16y^4 - 80y^2 - 125 = 0$, и т. д.

274. *Ответ:* при $x = -4; -2; 0; 2$.

275. *Решение.* Запишем уравнение в виде $y^7 = z^2 - x^2$.

Заметим, что $y^7 = \left(\frac{y^7+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y^7-1}{2}\right)^2$.

Полученное равенство является тождеством. При нечетном $y > 1$ можно положить

$z = \frac{1}{2}(y^7 + 1)$ и $x = \frac{1}{2}(y^7 - 1)$. Таким образом, всякая тройка чисел $\left(\frac{y^7-1}{2}; y; \frac{y^7+1}{2}\right)$, где $y > 1$ и y — нечетное число, является решением исходного уравнения.

Например, при $y = 3$, $z = 1094$, $x = 1093$, $y^7 = 2187$ и $1093^2 + 2187 = 1094^2$. Таким образом, исходное уравнение имеет сколько угодно решений в натуральных числах.

276. *Ответ:* $(b_1q^k)^7$.

277. *Ответ:* $\left[3; \frac{10}{3}\right) \cup (2; 3)$.

278. *Ответ:* $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

279. *Указание.* Показать, что данный многочлен имеет вид $(x^2 + Bx + Ca^2)^2$. Далее раскрыть скобки в обеих частях равенства, упростить и сравнить коэффициенты при x^3 и x, откуда находим $B = 5a$, $C = 5$, т. е. получим $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$.

280. *Ответ:* $x = -1$.

281. *Ответ:* $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$.

282. *Ответ:* $D(y) = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$.

283. *Ответ:* $3 + \sqrt{2}$.

284. *Ответ:* 7744.

285. *Указание.* $S = \frac{q_1}{1-q}$, где q — знаменатель прогрессии, тогда $S - q_1 = \frac{q_2}{1-q}$. Разделив I равенство на II, получим требуемое.

286. *Ответ:* нет.
Указание. $D = 18\ 493$ — не является полным квадратом.

287. *Решение.* Искомая сумма равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

и может оканчиваться лишь одной из цифр: 0, 1, 3, 5, 6, 8. Так что цифрой 9 оканчиваться не может.

Ответ: не может.

288. *Ответ:* 4.

289. *Ответ:* 4567.

290. *Ответ:* 1 : 4.

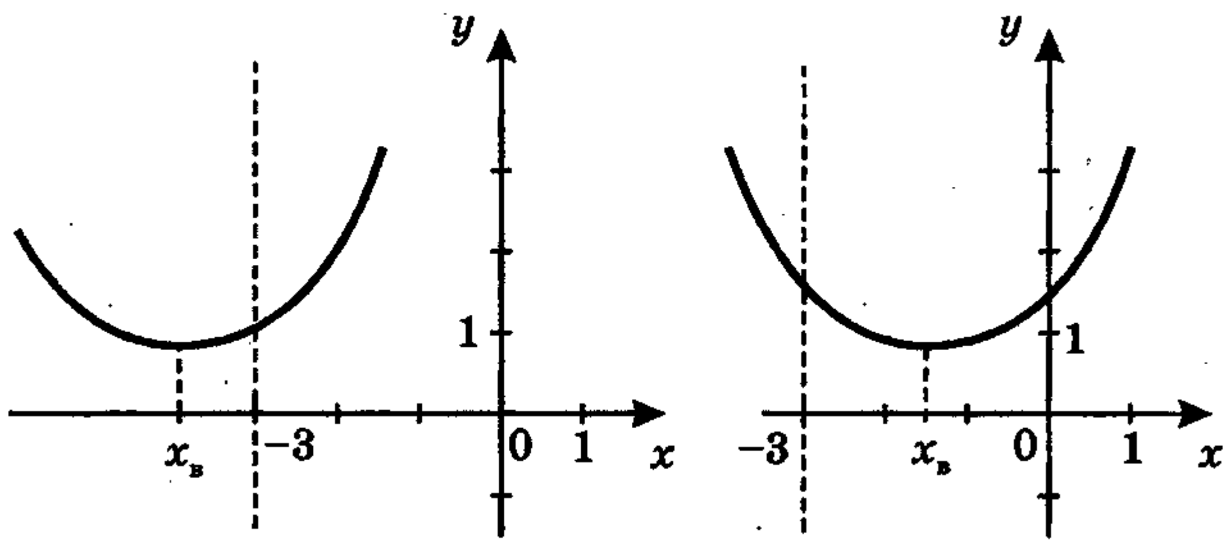
291. *Ответ:* 147.

292. *Указание.* Если угол между диагоналями останется без изменения.

293. *Ответ:* $r = 4d$.

294. *Ответ:* 4 : 5.

295. *Решение.* Имеем две возможности расположения вершин параболы:



1) $x_в = a < -3$. Тогда наименьшее значение функции $y = x^2 - 4ax + 45$ достигается в точке $x = -3$.

Имеем $y(-3) = 9 + 12a + 45 = 9$, откуда $a = -\dfrac{15}{4}$;

2) $x_в \geq -3$. Тогда наименьшее значение функции на $[-3; +\infty)$ достигается при $x = a$. Получим $y(a) = a^2 - 4a^2 + 45 = 9$, $a^2 = 12$, откуда $a = 2\sqrt{3}$.

296. *Ответ:* 1 арбуз, 39 яблок, 60 слив.

297. *Ответ:* делится при $n = 2k$, $k \in N$.

Указание. Рассмотреть два случая: 1) $n = 2k$; 2) $n = 2k + 1$.

298. *Ответ:* 13.

299. *Ответ:* (32; –3), (32; 2).

Указание. Преобразовать уравнение к виду $x = 7 + \dfrac{50}{y^2 - 7}$, откуда $y^2 - 7 = \pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm25, \pm50$.

300. *Ответ:* 10 989.

301. *Указание.* Записать данное выражение в виде $27^{n+1} - 8^{n+1}$, откуда и следует требуемое.

302. *Решение.* Так как $a \neq 0$, $b \neq 0$, то умножив обе части данного неравенства на $a^3b^3 \neq 0$, получим
$a^9b^3 + a^3b^9 \leq a^{12} + b^{12}$, или $(a^3 - b^3)(a^9 - b^9) \geq 0$, откуда $(a^3 - b^3)^2 (a^6 + a^3b^3 + b^6) \geq 0$ — верно при любых $a \neq 0$, $b \neq 0$. Значит, верно и равносильное ему исходное неравенство.

303. *Указание.* Умножить и разделить левую часть тождества на $2 \sin \alpha$. Далее применить формулу синуса двойного угла.

304. *Решение.* $13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot (12 \cdot 13) = 11! \cdot 12 \cdot 13$;
$13! - 11! = 11!(12 \cdot 13 - 1) = 11! \cdot 5 \cdot 31$ — кратно 31, ч. т. д.

305. *Решение.* Между корнями x_1, x_2 и x_3 данного уравнения существует зависимость

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

По условию задачи $x_1 + x_3 = 2x_2$, тогда, учитывая (1), имеем $2x_2 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, откуда $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$, ч. т. д.

306. *Решение.* Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b})$, $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{c})$, $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$.

Значит, $(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2) - 3(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - \frac{1}{3}((\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{b} - \vec{c})^2 + (\vec{c} - \vec{a})^2) = \frac{1}{3}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} + 2\vec{a}\,\vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, ч. т. д.

307. *Решение.* $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = \frac{a(a-b-c)^2}{4a^2} + \frac{b(a-b-c)}{2a} + c = \frac{(a-b-c)^2 + 2b(a-b-c) + 4ac}{4a} = \frac{(a-b-c)(a-b+2b) + 4ac}{4a} = \frac{(a-c)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{4a} = \frac{(a-b+c)(a+b+c)}{4a} = \frac{f(-1)\cdot f(1)}{4a} = 0$, ч. т. д.

10 класс

1. *Решение.* $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} = \sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Аналогично $\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Тогда значение выражения равно 1.

2. *Решение.* Пусть x_0 — общий корень уравнений, тогда $x_0^3 + mx_0 = -1$ и $x_0^4 + mx_0^2 = -1$.

Разделив почленно второе уравнение на первое, имеем $\frac{x_0^4+mx_0^2}{x_0^3+mx_0} = x_0 = 1$, тогда $1 + m \cdot 1 + 1 = 0$, $m =-2$.

Ответ: $m =-2$.

3. *Решение.* Пусть $\lg 2 = \frac{m}{n}$ — рациональное число, тогда $m = n \lg 2$, или $m = \lg 2^n$, откуда $10^m = 2^n$, что невозможно при целых m и n. Значит, $\lg 2$ — иррациональное число.

4. *Указание.* Показать, что $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Далее $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$, и т. д.

5. *Решение.* Заметим, что $4^7 + 7^{16} = 2^{14} + 7^{16} =$
$= 2^{14} + 2 \cdot 2^7 \cdot 7^8 + 7^{16} - 14^8 = (2^7 + 7^8)^2 - 14^8 =$
$= (2^7 + 7^8 + 14^4)(2^7 + 7^8 - 14^4)$ — составное число, ч. т. д.

6. *Решение.* В круг радиуса 10 нельзя поместить 400 кругов диаметра 1, не налегающих друг на друга, так как сумма их площадей $400 \cdot \frac{\pi}{4}$ равна площади круга $100\,\pi$.

7. *Решение.*

I способ

Пусть $13 = a$, тогда $x^2 - a = \sqrt{x+a}$, или $x^4 - 2ax^2 + a^2 = x + a$, $a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0$, откуда $a_{1,2} = \frac{(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2}$, $a_1 = x^2 + x + 1$, $a_2 = x^2 - x$.
Значит, $x^2 + x + 1 = 13$, $x^2 - x = 13$.

Из I уравнения находим $x_1 = -4$, $x_2 = 3$ (не удовлетворяет, так как $x^2 - 13 \geq 0$); из II уравнения $x_3 = \frac{1+\sqrt{53}}{2}$, $x_4 = \frac{1-\sqrt{53}}{2}$ (не удовлетворяет).

Ответ: -4; $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{53})$.

II способ

$x^4 - 26x^2 + 169 - x - 13 = 0$, или
$(x^2 - 12,5)^2 - (x + 0,5)^2 = 0$, или
$(x^2 - x - 13)(x^2 + x - 12) = 0$, и т. д.

8. *Ответ:* 4.

9. *Указание.* Соединить центр шара с вершинами многогранника и найти сумму объемов полученных пирамид.

10. *Ответ:* ± 2; $\pm 2\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{3}$.

Указание. $\sqrt[3]{4-x^2} = a$, $\sqrt{x^2-3} = b$, $b \geq 0$. Далее решить систему $\begin{cases} a^3 + b^3 = 1, \\ a + b = 1. \end{cases}$

II способ

Замена $\sqrt{x^2-3}=y$, $4-x^2=1-y^2$, $\sqrt[3]{1-y^2}=1-y$, или $y^3-4y^2+3y=0$, и т. д.

11. *Решение.* $x^6-y^6=(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+$
$+x^2y^3+xy^4+y^5)=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=$
$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$,
откуда $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5=$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.

12. *Ответ:* $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$.

Указание. Учесть, что $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=$
$=-2\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Далее решить уравнение

$$4\cos^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-5=0$$

как квадратное относительно $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$, и т. д.

13. *Ответ:* 21.

Указание. Согласно условию, имеем

$$10x+y+x^3+y^3=10y+x,$$
$$\text{или } x^3+y^3=9(y-x).$$

Заметим, что ни одна из цифр не превышает 4. Единственное число $21=12+1^3+2^3$.

14. *Решение.* $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)(a^4-$
$-a^2b^2+b^4)=(a^2+b^2)((a^2+b^2)^2-3a^2b^2)=((a+b)^2-$
$-2ab)(a^2+b^2-\sqrt{3}ab)(a^2+b^2+\sqrt{3}ab)=((a+b)^2-$
$-2ab)((a+b)^2-(2+\sqrt{3})ab)((a+b)^2-(2-\sqrt{3})ab)$.

Так как ab и $a + b$ делятся на c (по условию), то каждый множитель делится на c, значит, произведение делится на c^2.

15. *Ответ:* $x = 1$.

16. *Указание.* $13(x + y) = (9x + 4y) + (4x + 9y)$. Далее учесть, что $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

17. *Решение.* На продолжении BM за точку M возьмем точку D так, что $MD = CM$. Тогда ΔCDM правильный и $CD \parallel KM$, поэтому $BM : MK = BD : DC = (BM + CM) : CM$, т. е.

$$\frac{1}{MK} = \frac{1}{CM} + \frac{1}{BM}.$$

18. *Ответ:* $(1; 1)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

19. *Ответ:* $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

20. *Решение.* Из условия $7a + 13b = 47$ имеем $a = \frac{1}{7}(47 - 13b)$, тогда исходное неравенство примет вид $20(\frac{1}{7}(47 - 13b)^2 + 13b^2) \geq 2209$, откуда имеем $5200b^2 - 2440b + 28\,717 \geq 0$, или после упрощения получим $(20b - 47)^2 \geq 0$, верно при любом b, а значит, верно и исходное неравенство, ч. т. д.

21. *Указание.* Прологарифмировать обе части уравнения по основанию 10 (или по другому основанию).

22. *Ответ:* $(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

Указание. Умножить числитель и знаменатель на $x^4 - 1$.

23. *Решение.* Пусть $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2006}{2007}=A_1$,

$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}=A_2$.

Так как $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$; ...; $\frac{2009}{2010}<\frac{2010}{2011}$, то

$A_1^2<A_1\cdot A_2=\frac{1}{2011}$.

Следовательно, $A_1<\frac{1}{\sqrt{2011}}<\frac{1}{44}$, ч. т. д.

24. *Указание.* Из отношения $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ находим $a_1=\frac{1}{2}d$.

25. *Ответ:* $\sqrt{5}-2$.

26. *Ответ:* существует; $h=12$, $c=13$, $b=14$, $a=15$.

27. *Решение.* Так как $10=2\cdot5$, то количество нулей в числе $2010!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot=2010$ столько же, сколько раз 5 входит в разложение на простые множители этого числа. Каждое пятое число делится на 5, значит, чисел от 1 до 2010, делящихся на 5, будет 402, делящихся на 25 — 80, на 125 — 16, на 625 — 3. Значит, число 5 входит в разложение в $402+80+16+3=501$-й степени. Тогда в числе 2010! будет 501 нуль, и поскольку двойка входит в разложение в большей степени, чем 5, то последняя цифра четная.

Ответ: оканчивается 501 нулем, последняя цифра четная.

28. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Показать, что левая часть уравнения приводится к виду $(\sqrt{1+x})^3 - (\sqrt{1-x})^3$, и т. д.

29. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Записать уравнение в виде $\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x = 1$. Далее учесть свойство монотонности функций.

30. *Ответ:* 6.

31. *Ответ:* (3; 1).

Указание. Разделить II уравнение на I, и т. д.

32. *Ответ:* 4 и 21.

33. *Указание.* Обозначить левую часть через x и возвести обе части полученного равенства в куб, использовать формулу $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Замечание. Можно решить иначе, выделив полный куб подкоренных выражений.

34. *Ответ:* (2; 1), (1; 2), (–2; 1), (1; –2).

Указание. Записать уравнения системы в виде

$x^4 + y^4 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$,

$x + y = xy + 1$. Далее подставить в I уравнение, затем замена $xy = a$, и т. д.

35. *Решение.* Так как $|\cos\alpha| \le 1$ при любом $\alpha \in R$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos x = 1,\\ \cos 7x = 1;\end{cases} \quad \begin{cases}x = 2\pi n,\\ x = \dfrac{2\pi k}{7},\end{cases}$$ откуда $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

36. *Указание.* $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z.$

Преобразовать уравнение к виду
$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \sin 6x = 1$, равносильное двум системам.

37. *Ответ:* (4; 3; 9), (9; 3; 4).

Указание. Возвести I уравнение в квадрат и вычесть II.

38. *Решение.* Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, причем $a < b < c$. Так как по условию задачи стороны a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то

$$a + c = 2b. \qquad (1)$$

По теореме синусов $\frac{b}{\sin \angle B} = 2R$, откуда $b = 2R \sin \angle B$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r = \frac{abc}{4R}$, или $\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R}$, или, учитывая (1), имеем $\frac{3}{2} br = \frac{abc}{4R}$, откуда

$$ac = 6Rr. \qquad (2)$$

По теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$, или $b^2 = (a + c)^2 - 2ac - 2ac \cos \angle B$,

$12Rr(1 + \cos \angle B) = 12R^2 \sin^2 \angle B$,

$2ac\,(1 + \cos \angle B) = 3b^2$.

Учитывая (2), находим $12Rr(1 + \cos \angle B) = 3b^2$, и, так как $b = 2R \sin \angle B$, то получим

$r(1 + \cos \angle B) = R \sin^2 \angle B$, или

$r(1 + \cos \angle B) = R\,(1 - \cos \angle B)\,(1 + \cos \angle B)$.

Но $1 + \cos \angle B \neq 0$, так как $\angle B \neq 180°$, тогда

$r = R(1 - \cos \angle B)$, откуда $1 - \cos \angle B = \frac{r}{R}$.

По условию задачи $\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, откуда $\cos\angle B = \sqrt{3}/2$. Значит, $\angle B = 30°$.

Ответ: 30°.

39. *Решение.* Заметим, что при $2 + a = 0$, т. е. $a = -2$ уравнение обращается в линейное: $3x - 2 + 5 = 0$, откуда $x = -1$. Пусть $a \neq -2$, тогда исходное уравнение является квадратным и, согласно теореме Виета и обратной к ней (при наличии пары корней x_1 и x_2), равносильно системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a-1}{2+a}, \\ x_1 x_2 = \frac{a+5}{2+a}. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 + x_2 + x_1x_2 = \frac{a-1}{2+a} + \frac{a+5}{2+a} = 2$, или $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 3$. Если корни x_1 и x_2 — целые числа, то это означает, что пара чисел $(x_1 + 1;\ x_2 + 1)$ совпадает либо с парой (1; 3), либо с парой (−1; −3), а пара $(x_1; x_2)$ — либо с (0; 2), либо с (−2; 4) соответственно, т. е. либо $\frac{a+5}{2+a} = 0 \cdot 2$, откуда $a = -5$, либо $\frac{a+5}{2+a} = (-2)\cdot(-4)$, или $\begin{cases} a+5 = 8(2+a), \\ 2+a \neq 0; \end{cases}$

$7a = -11$, $a = -\frac{11}{7}$.

Ответ: $-2; -5; -\frac{11}{7}$.

40. *Указание.* $\dfrac{x+y}{2} \ge \dfrac{a+b}{2}$, где $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \sqrt{ab}$. Далее возвести полученное неравенство в 4-ю степень, и т. д.

41. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$$\frac{x^3y^3+x^2+y^2}{xy^3+1} = \frac{1753}{193}, \text{ или}$$

$$\frac{x^2(xy^3+1)+y^2}{xy^3+1} = \frac{193\cdot 9+16}{193}.$$

Далее имеем $x^2 + \dfrac{y^2}{xy^3+1} = 9 + \dfrac{16}{193}$, или

$$x^2 + \cfrac{1}{xy+\cfrac{1}{y^2}} = 9 + \cfrac{1}{12+\cfrac{1}{16}}.$$

Известно, что всякое натуральное число можно представить в виде цепной дроби единственным образом. Тогда $x^2 = 9$, $xy = 12$, $y^2 = 16$, т. е. $x = 3$, $y = 4$.

Ответ: $x = 3$, $y = 4$.

42. *Решение.* Поскольку $\sqrt{|x|+4} > \sqrt{|x|}$ при любом x, то $a > 0$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{|x|+4} > \sqrt{|x|} + a$, или $|x| + 4 = |x| + a^2 + 2a\sqrt{|x|}$, $2a\sqrt{|x|} = 4 - a^2$, или

$$\sqrt{|x|} = \frac{4-a^2}{2a}. \qquad (1)$$

Заметим, что $4 - a^2 \ge 0$, $a^2 \le 4$, откуда $-2 \le a \le 2$. Так как $a > 0$, то $0 < a \le 2$.

Из (1) $\Rightarrow |x| = \left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$, откуда $x_{1,2} = \pm\left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$.

Ответ: при $0 < a \le 2$, $x_{1,2} = \pm\left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$; при остальных a решений нет.

43. *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{\lg 3}(\lg 2 + \lg 3)$.

44. *Решение.* Пусть $\overline{xyzt} = 1000x + 100y + 10z + t$.

По условию $x = z$, $y = t$, тогда
$1000x + 100y + 10z + t = 1000x + 100y + 10x + y = 1010x + 101y = 101 \cdot (10x + y)$ — кратно 101.

45. *Ответ:* при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup [2; +\infty)$.

46. *Ответ:* $x = \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg(1+\sqrt{5}) - \lg 2}$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt[x]{6}$.

47. *Решение.* Рассмотрим отношение

$$\frac{101^{99}}{100^{100}} = \frac{101^{100} \cdot 101^{-1}}{100^{100}} = \left(\frac{101}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} =$$

$$= \left(\frac{100+1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} <$$

$< 3 \cdot 101^{-1} < 1 \Rightarrow 101^{99} < 100^{100}$, т. е. $100^{100} > 101^{99}$.

Замечание. Здесь мы использовали тот факт, что $2 \le \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < 3$.

48. *Указание.* $\lg a + \log_a 10 = \lg a + \dfrac{1}{\lg a}$, и т. д.

49. *Ответ:* $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

50. *Решение.* Если искомая последовательность существует, то ее можно представить в виде

$$a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + k) = 100. \qquad (1)$$

Левая часть (1) представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию, где

$$a_1 = a,\ \ a_n = a + k;\ n = k + 1,\ \ S_n = 100.$$

Замечание. Из $a_n = a + k$ получаем $n = k + 1$. По формуле суммы n членов арифметической прогрессии имеем

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = S_n,\ \text{ или }\ \frac{a + a + k}{2} \cdot (n + 1) = 100,$$

откуда $(2a + k)(k + 1) = 200.$ (2)

Заметим, что $(2a + k) - (k + 1) = 2a - 1$ — нечетно, следовательно, один из множителей четен, а другой нечетен.

Кроме того, $2a + k > k + 1$ и для числа 200 получим разложение, удовлетворяющее (2):

$200 = 200 \cdot 1 = 40 \cdot 5 = 25 \cdot 8.$

Следовательно, имеем

1) $\begin{cases} 2a + k = 200, \\ k + 1 = 1, \end{cases}$ откуда $k = 0$ — не удовлетворяет, так как получим одно число;

2) $\begin{cases} 2a + k = 40, \\ k + 1 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 18, \\ k = 4, \end{cases}$ откуда получим последовательность $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100;$

Из (1) $\Rightarrow |x| = \left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$, откуда $x_{1,2} = \pm\left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$.

Ответ: при $0 < a \le 2$, $x_{1,2} = \pm\left(\frac{4-a^2}{2a}\right)^2$; при остальных a решений нет.

43. *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{\lg 3}(\lg 2 + \lg 3)$.

44. *Решение.* Пусть $\overline{xyzt} = 1000x + 100y + 10z + t$.

По условию $x = z$, $y = t$, тогда
$1000x + 100y + 10z + t = 1000x + 100y + 10x + y = 1010x + 101y = 101 \cdot (10x + y)$ — кратно 101.

45. *Ответ:* при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup [2; +\infty)$.

46. *Ответ:* $x = \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg(1+\sqrt{5}) - \lg 2}$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt[x]{6}$.

47. *Решение.* Рассмотрим отношение

$$\frac{101^{99}}{100^{100}} = \frac{101^{100} \cdot 101^{-1}}{100^{100}} = \left(\frac{101}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} =$$

$$= \left(\frac{100+1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} <$$

$< 3 \cdot 101^{-1} < 1 \Rightarrow 101^{99} < 100^{100}$, т. е. $100^{100} > 101^{99}$.

Замечание. Здесь мы использовали тот факт, что $2 \le \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < 3$.

48. *Указание.* $\lg a + \log_a 10 = \lg a + \dfrac{1}{\lg a}$, и т. д.

49. *Ответ:* $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

50. *Решение.* Если искомая последовательность существует, то ее можно представить в виде

$$a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + k) = 100. \qquad (1)$$

Левая часть (1) представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию, где

$$a_1 = a,\ \ a_n = a + k;\ n = k + 1,\ \ S_n = 100.$$

Замечание. Из $a_n = a + k$ получаем $n = k + 1$. По формуле суммы n членов арифметической прогрессии имеем

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = S_n, \text{ или } \frac{a + a + k}{2} \cdot (n + 1) = 100,$$

откуда $(2a + k)(k + 1) = 200$. (2)

Заметим, что $(2a + k) - (k + 1) = 2a - 1$ — нечетно, следовательно, один из множителей четен, а другой нечетен.

Кроме того, $2a + k > k + 1$ и для числа 200 получим разложение, удовлетворяющее (2):

$200 = 200 \cdot 1 = 40 \cdot 5 = 25 \cdot 8$.

Следовательно, имеем

1) $\begin{cases} 2a + k = 200, \\ k + 1 = 1, \end{cases}$ откуда $k = 0$ — не удовлетворяет, так как получим одно число;

2) $\begin{cases} 2a + k = 40, \\ k + 1 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 18, \\ k = 4, \end{cases}$ откуда получим последовательность $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$;

3) $\begin{cases} 2a+k=25, \\ k+1=8; \end{cases}$ $\begin{cases} a=9, \\ k=7, \end{cases}$

т. е. $9 + 10 + 11 + \ldots + 16 = 100$.

Таким образом, существуют две последовательности, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: а) $18 + 19 + \ldots + 22 = 100$; б) $9 + 10 + \ldots + 16 = 100$.

51. *Указание.* Перенести xyz в каждом уравнении в правую часть и перемножить полученные уравнения.

52. *Ответ:* $S_n = \dfrac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}} + (2n-1)$.

Указание. Раскрыть скобки и сгруппировать члены.

53. *Ответ:* 42 857 и 85 714.

Указание. Если X — искомое пятизначное число и k — приписываемое число, то получим

$\dfrac{10X+k}{X+k\cdot 100000} = 3$, откуда $X = k \cdot 42\,857$, где $0 < k \le 9$, и т. д.

54. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 2$.

55. *Ответ:* 13^{13}.

Указание. $12 = 13 - 1$; $14 = 13 + 1$.

Далее учесть, что $a^n - 1 = (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1)$.

56. *Решение.* Пусть r_1 и r_2 — соответственно радиусы нижнего и верхнего оснований усеченного конуса, R — радиус шара, α — искомый угол между образующей и плоскостью основания.

Согласно условию имеем

$$2r_1 + 2r_2 = 5R. \qquad (1)$$

Но $r_1 = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $r_2 = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, тогда (1) примет вид

$$2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5R, \text{ или}$$

$$2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2 = 0,$$

откуда находим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$ или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Так как $2\operatorname{arctg} 2 > \frac{\pi}{2}$, то значение $\alpha = 2\operatorname{arctg} 2$ не подходит. Значит, $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

57. *Ответ:* (3; 2).

58. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
Указание. Записать уравнение в виде
$(x^x - x^2)(x^x - 1)$.

59. *Ответ:* 1.
Указание. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения, тогда $x_1 + x_2 = \sqrt{85}/4$, $x_1x_2 = 21/16$. Пусть $x_1 > x_2$, тогда $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2)$.

$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$, и т. д.

60. *Ответ:* $x = -\frac{1457}{728}$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt[3]{x+2} \neq 0$ и ввести замену $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x+2}} = y$.

Замечание. Уравнение можно решить иначе.

61. *Ответ:* $x^2 + x + 1$.

62. *Ответ:* $(-2; -3; -4)$, $(4; 3; 4)$.

Указание. Замена $\dfrac{x+y}{5} = \dfrac{x+z}{6} = \dfrac{y+z}{7} = t$, тогда II уравнение системы примет вид $25t^2 + 36t^2 + 49t^2 = 110$, откуда $t_{1,2} = \pm 1$, и т. д.

63. *Указание.* Преобразовать уравнение к виду

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x \sin x}.$$

Далее замена $\sin x + \cos x = y$.

Замечание. Возможны и другие способы решения.

64. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Записать уравнение в виде

$\left(\dfrac{2013}{2012}\right)^x - 1 = \left(\dfrac{1}{2012}\right)^x$ и использовать свойство монотонности функции.

65. *Ответ:* 832.

66. *Ответ:* если $a < -5$, то корней нет;
если $a = -5$, то $x = 3$;
если $-5 < a \leq -4$, то $x = 3 \pm \sqrt{5+a}$;
если $a > -4$, то $x = 3 + \sqrt{5+a}$.

67. *Решение.* Заметим, что $27^{2010} < 30^{2010} = 9^{1005} \cdot 10^{2010} < 10^{1005} \cdot 10^{2010} = 10^{3015}$.

10^{3015} — наименьшее целое число, имеющее 3016 цифр, т. е. 27^{2010} имеет меньше 3016 цифр.

68. *Ответ:* $x_{1,2} = \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

Указание. $(x^2 + x)^2 = |x^2 + x|^2$.

Обозначив $|x^2 + x| = t$, где $t > 0$, получим $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -2$ — не подходит, и т. д.

69. *Указание.* Возвести в куб обе части уравнения и заменить $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = y$, после чего получим $x + 3xy + x^2 = y^2$.

70. *Указание.* Учесть, что $a + c = 2b$, тогда, подставив $b = \frac{1}{2}(a + c)$ в данное равенство, получим тождество.

71. *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

72. *Решение.* Общий метод: положить $20 + 14\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^3$. Далее решить систему уравнений

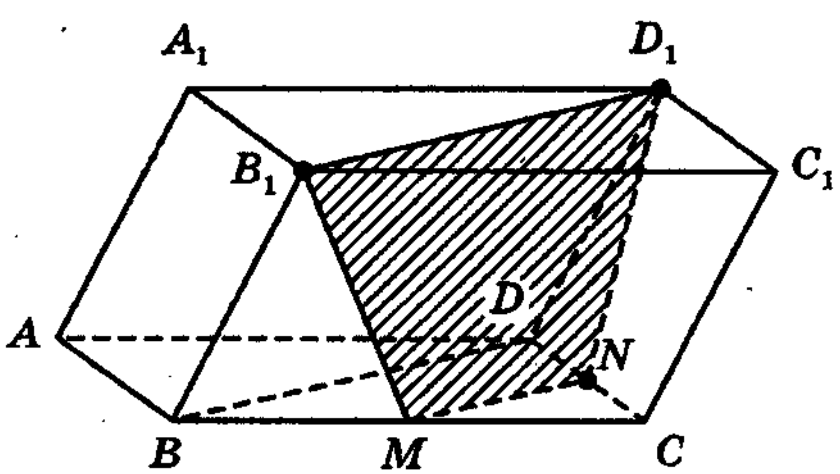
$$\begin{cases} a^3 + 6ab^2 = 20, \\ 3a^2b + 2b^3 = 14, \end{cases}$$

откуда находим $a = 2$, $b = 1$.

Тогда получим $a + b\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$ и $a - b\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$. Значит, $(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$, ч. т. д.

73. *Указание.* Использовать основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

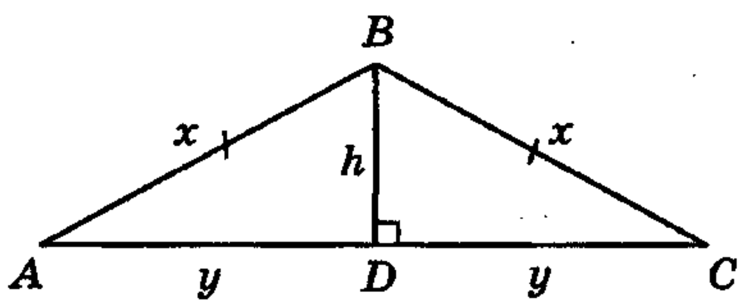
74. *Решение.* По условию задачи точка N — середина DC. Известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



Значит, плоскость сечения пересечет основания $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным отрезкам. Проведем $BD \parallel B_1D_1$. Из точки N проводим $MN \parallel BD$, значит, $MN \parallel B_1D_1$. Соединим точки B_1 и M, D_1 и N, тогда B_1D_1NM — искомое сечение. Таким образом, в четырехугольнике B_1D_1NM имеем $B_1D_1 \parallel MN$, значит, B_1D_1NM — трапеция (по определению).

75. *Ответ:* (0; 0), (3; 1).

76. *Решение.* Пусть x — длина боковой стороны, $2y$ — основания, h — высота равнобедренного треугольника. Так как $\angle ABC = 120°$, то $\angle A = \angle C = 30°$.



$$S_{\Delta ABC} = pr = (x + y)r. \qquad (1)$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2y}{2R}$. (2)

Сравнивая (1) и (2), имеем $(x + y)r = \dfrac{x^2y}{2R}$. (3)

По теореме синусов $\dfrac{x}{\sin\angle A} = 2R$, откуда $x = R$,

тогда равенство (3) примет вид $(R + y)r = \dfrac{R^2y}{2R}$,

или $(R + y)y = \dfrac{1}{2}Ry$. (4)

Из ΔABD по теореме Пифагора $x^2 - y^2 = h^2 = \frac{1}{4}x^2$, или $\frac{3}{4}x^2 = y^2$, т. е. $y = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, тогда (4) запишется в виде $2\left(R + \frac{1}{2}R\sqrt{3}\right)r = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, или

$$2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Значит, $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$.

77. *Ответ:* $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}; \mp\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$, $(\pm1; \pm2)$.

Указание. Заменой $x = ty$ данная система приводится к виду $\begin{cases} y^2(3t^2 + 2t + 1) = 11, \\ y^2(t^2 + 2t + 3) = 17, \end{cases}$ и т. д.

78. *Указание.* Возвести первое уравнение в квадрат и заменить $x^4 + y^4$ через 97. Возможны и другие способы решения.

79. *Ответ:* $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Указание. Сложить почленно левые и правые части.

80. *Решение.* Пусть x и y — соответственно цифры сотен и десятков, тогда искомое число имеет вид $100x + 10y + 5$. Если цифру 5 перенести на I место, то получим число вида $500 + 10x + y$. Согласно условию получим уравнение

$100x + 10y + 5 - (500 + 10x + y) = \overline{aaa}$, где $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a$ — трехзначное число с одинаковыми цифрами, тогда

$$100x + 10y + 5 - 500 - 10x - y = 111a,$$

$$\text{или } 3(10x + y - 55) = 37a. \qquad (1)$$

Так как число 37 простое, то a кратно 3, т. е. $a = 3k$, тогда $1 \le 3k \le 9$, откуда $k = 1, 2, 3$ ($k \in N$). Соотношение (1) примет вид

$$10x + y - 55 = 37k.$$

Имеем 3 возможности:

1. Если $k = 1$, то $10x + y = 92$, что выполняется лишь при $y = 2$, $x = 9$, так как $1 \le x \le 9$, $1 \le y \le 9$. Искомое число 925.

2. Если $k = 2$, то $10x + y = 129$ не имеет решений при указанных ограничениях.

3. Если $k = 3$, то $10x + y = 166$ также не имеет решений. Итак, 925 — единственное число.

Ответ: 925.

81. *Ответ:* (1; 3; 5).

Указание. Записать уравнение в виде

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}.$$

82. *Решение.* Пусть $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} a(a^2 - 1) = b(b^2 + 5), & (1) \\ a^2 = b^2 + 3. & (2) \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат, учитывая уравнение (2):

$$\begin{cases} a^2(a^2 - 1)^2 = b^2(b^2 + 5)^2, \\ a^2 = b^2 + 3, \end{cases} \text{ или}$$

$$(b^2 + 3)(b^2 + 2)^2 = b^2(b^2 + 5)^2. \qquad (3)$$

Пусть $b^2 = t$, где $t \geq 0$, тогда получим

$$(t + 3)(t + 2)^2 = t(t + 5)^2 \text{ или}$$

$$(t + 3)(t^2 + 4t + 4) = t(t^2 + 10t + 25).$$

После упрощения получим $t^2 + 3t - 4 = 0$, откуда $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Так как $t \geq 0$, то $t = 1$, тогда $b^2 = 1$, $a^2 = b^2 + 3 = 4$, значит, $x = a^2 = 4$; $y = b^2 = 1$.

Ответ: (4; 1).

83. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Умножить обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части уравнения. Полученное уравнение решить с данным как систему способом сложения, и т. д.

84. *Указание.* Преобразовать уравнение к виду $(x - 2y)^2 + (y - 2x)^2 = 5 = 1^2 + 2^2$, и т. д.

85. *Решение.* Пусть $\sqrt[3]{\frac{17}{3}x - \frac{10}{3}} = y$, тогда $\frac{17}{3}x -$

$$- \frac{10}{3} = y^3, \text{ или } 3y^3 + 10 = 17x. \qquad (1)$$

При этом исходное уравнение запишется в виде

$$3x^3 + 10 = 17y. \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), имеем систему уравнений

$\begin{cases} 3x^3 + 10 = 17y, \\ 3y^3 + 10 = 17x, \end{cases}$ тогда $3x^3 - 3y^3 = 17y - 17x$, или

$3(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 17(x - y) = 0$,

$(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 17) = 0$, откуда $x - y = 0$, или $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 17 = 0$.

Так как $3x^2 + 3y^2 \geq |3xy|$,

то $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 17 > 0$.

Если $x - y = 0$, то $x = y$, тогда уравнение (2) примет вид $3x^3 - 17x + 10 = 0$, или $3x(x^2 - 4) -$

$-5(x-2)=0$, $(x-2)(3x^2+6x-5)=0$, откуда $x_1=2$, или $3x^2+6x-5=0$, $D/4=9+15=24>0$,

$$x_{2,3}=\frac{-3\pm2\sqrt{6}}{3}=-1\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

86. *Указание.* Разложить заданное число на множители. Тогда получим $13^3\cdot3\cdot61$ — делится на 61.

87. *Решение.* Имеем $5(x+y)^3+54(x+y)^2-108xy$, откуда $xy=\dfrac{(x+y)^2(54-(x+y))}{108}$.

Так как $x>0$, $y>0$, то $54-5(x+y)>0$, или $x+y<10{,}8$, т. е. $x+y\le10$.

Следовательно, $x+y=2, 3, 4, \ldots, 10$. Условию задачи удовлетворяет лишь $x+y=6$, тогда $xy=8$, т. е. получим 2 пары решений: (2; 4), (4; 2).

88. *Решение.* Выделим полные квадраты в каждом уравнении системы

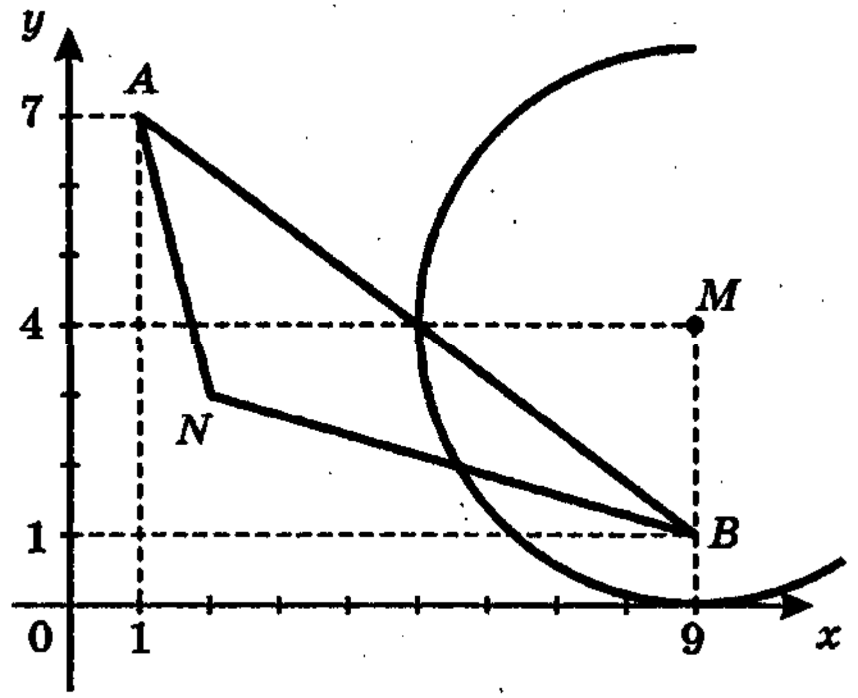
$$\begin{cases}(x-9)^2+(y-4)^2=16, & (1)\\ \sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}+\sqrt{(x-9)^2+(y-1)^2}=10. & (2)\end{cases}$$

Уравнение (1) есть уравнение окружности радиуса $r=4$ с центром в точке $M(9;4)$.

Пусть $N(x;y)$ — произвольная точка координатной плоскости.

Тогда $d_1=\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$ — расстояние от точки N до точки $A(1;7)$,

$d_2=\sqrt{(x-9)^2+(y-1)^2}$ — до точки $D(9;1)$.



Следовательно, уравнению (2) удовлетворяют координаты тех и только тех точек плоскости, при которых выполняется равенство $d_1 + d_2 = 10$.

Заметим, что $|AB| = \sqrt{(9-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{100} = 10.$

Значит, точка N находится на отрезке AB. Уравнение прямой AB имеет вид $y = kx + b$. Для нахождения значений k и b учтем, что точки A и B принадлежат прямой, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} k+b=7, \\ 9k+b=1, \end{cases}$ откуда находим $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{31}{4}$.

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$(x-9)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{31}{4} - 4\right) = 16,$$

или после упрощений получим $25x^2 - 378x + 1265 = 0$, откуда $x_1 = 5$, $x_2 = 10{,}12$ — не подходит, так как точка с такой абсциссой не принадлежит отрезку AB.

Если $x = 5$, то $y = -\dfrac{3}{4} \cdot 5 + \dfrac{31}{4} = 4$.

Точка $N(5; 4) \in AB$, значит, пара $(5; 4)$ — решение исходной системы уравнений.

Ответ: $(5; 4)$.

89. *Решение.* Поскольку $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2$, то $y = (x-1)^3 + 2$. График этой функции может быть получен из графика функции $y = x^3$ параллельным переносом. Так как у графика функции $y = x^3$ начало координат $(0; 0)$ — центр симметрии, то у исходного графика функции центром симметрии будет точка $(1; 2)$.

90. *Указание.* Записать уравнение в виде

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) + xy = 13.$$

Далее заменой $x + y = z$ привести к виду $xy = \dfrac{z^3 - 13}{3z - 1}$, после чего выделить целую часть. Возможны и другие способы решений.

91. *Решение.*

I способ

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AC \sin \angle C = 6$. Так как $AB < AC$, то $\angle C < \angle B$, т. е. $\angle C = 90°$, тогда $\cos \angle C > 0$. Но $\cos \angle C = \sqrt{1 - \sin^2 \angle C} = \dfrac{4}{5}$. По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle C$, откуда $AB = 3$. Известно, что $r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, где r — радиус вписанной окружности, $p = \dfrac{1}{2}(AB + BC + AC) = 6$.

Значит, $r = \dfrac{6}{6} = 1$.

Ответ: 1.

II способ

Так как $AB = 3$ и $3^2 + 4^2 = 5^2$, то ΔABC прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), где $\angle B = 90°$.

Тогда $r = \dfrac{1}{2}(AB + BC - AC) = 1$.

92. *Ответ:* $16\sqrt{2}$ дм^2.

93. *Решение.* Запишем уравнение в виде
$5^{\log_3(x-1)} - 1 = 1 + 3^{\log_5(x+1)}$, или
$5^{\log_3(x-1)} + 3^{\log_3(x-1)} = 5^{\log_5(x+1)} + 3^{\log_5(x+1)}$, откуда, пользуясь монотонностью функции $5^t + 3^t$, получим

$$\log_3(x-1) = \log_5(x+1).$$

Пусть $\log_3(x-1) = y$, тогда $x - 1 = 3^y$ и $\log_5(x+1) = y$, откуда $5^y = x + 1$.

Значит, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^y + \dfrac{2}{5^y} = 1$.

Поскольку левая часть полученного уравнения — убывающая функция, то $y = 1$ — единственный корень, тогда $x = 3^y + 1 = 4$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 4$.

94. *Ответ:* $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Указание. Показать, что ΔABC равнобедренный. Далее применить теорему косинусов в ΔABE и использовать подобие ΔBEC и ΔAED.

95. *Решение.*

I способ (выделение в левой части полного квадрата)

$(4x - 3\sqrt{x+16})^2 = 0$, или $4x = 3\sqrt{x+13}$.

После возведения обеих частей в квадрат получим уравнение $16x^2 - 9x - 117 = 0$, откуда находим $x_1 = 3$, $x_2 = -\dfrac{78}{32} < 0$ — не подходит, так как $x > 0$ и $16x^2 + 9x + 117 > 0$ ($D < 0$, $a = 16 > 0$).

Ответ: $x = 3$.

II способ (замена переменной)

$x\sqrt{x+13} \neq 0$, тогда

$$16 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \frac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0.$$

Далее замена $\dfrac{x}{\sqrt{x+13}} = y$, где $x > 0$, $y > 0$, и т. д.

III способ (приведение к однородному)

Пусть $\sqrt{x+13} = y$, тогда $9x + 117 = 9y^2$.

Получим уравнение $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$, или $(4x - 3y)^2 = 0$, и т. д.

96. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде

$$\sin 9x = 2(1 - \cos 6x). \qquad (1)$$

Так как $1 - \cos 6x = 2\sin^2 3x$, то уравнение (1) примет вид

$$\sin 9x = 4\sin^2 3x. \qquad (2)$$

Вычтем из обеих частей (2) $\sin 3x$:

$\sin 9x - \sin 3x = \sin 3x\,(4\sin 3x - 1)$, или

$2\sin 3x \cos 6x = \sin 3x\,(4\sin 3x - 1)$.

Отсюда имеем

1) $\sin 3x = 0$; $3x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

2) $2\cos 6x - 4\sin 3x + 1 = 0$.

Так как $\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$,
то $2(1 - 2\sin^2 3x) - 4\sin 3x + 1 = 0$, или
$4\sin^2 3x + 4\sin 3x - 3 = 0$, откуда находим
$\sin 3x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;
$\sin 3x = -1,5$ — нет корней.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$; $(-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

II способ

Пусть $3x = y$, тогда получим $\sin 3y + 2\cos 2y = 2$. Так как $\sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y$ и $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$, то получим $3\sin y - 4\sin^3 y + 2(1 - 2\sin^2 y) = 2$, или $\sin y \cdot (3 - 4\sin^2 y - 4\sin y) = 0$, откуда:

1) $\sin y = 0$, $y = \pi n$, т. е. $3x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

2) $3 - 4\sin^2 y - 4\sin y = 0$, или
$4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0$, откуда $\sin y = -1,5$ — нет корней, $\sin y = \frac{1}{2}$.

Если $\sin y = \frac{1}{2}$, то $y = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, т. е.

$3x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, откуда $x = (-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

III способ

Левая часть уравнения не превосходит 2 и равна 2, если $\begin{cases}\sin 9x = 0,\\ \cos 6x = 1,\end{cases}$ и т. д.

97. *Указание.* Предварительно показать, что
$2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$ и
$10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$.

98. *Указание.* Учесть, что $x - 7 > 0 \Rightarrow x - 4 > 0$ и $x - 3 > 0$, тогда $x - 4 + x - 3 = x - 7$, откуда $x = 0$ — не подходит, так как $x > 7$. Значит, исходное уравнение не имеет корней.

99. *Указание.* Решить заменой $\sqrt{x^2+1} = y$, $y > 0$.

Замечание. Уравнение можно решить заменой $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

100. *Решение.* Заметим, что число n в последовательности занимает подряд n мест. Следовательно, перед первым числом $(n + 1)$ стоит $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$ чисел. Значит, нам надо найти такое n, что $\frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n - 1) < 2010 \le \frac{1+n}{2} \cdot n$, откуда подбором находим $n = 63$.

Ответ: 63.

101. *Решение.* Пусть четырехзначное число имеет вид $\overline{abcd}$. По условию $13 \cdot \overline{abcd}$ — точный куб, тогда $13 \cdot \overline{abcd}$ имеет вид $(13k)^3$.

Значит, $\overline{abcd} = 13^2 \cdot k^3$, т. е. $\overline{abcd}$ кратно $13^2 = 169$. Но $1000 : 169 = 5{,}9\ldots > 5$, $9999 : 169 = 59{,}1\ldots < 60$, т. е. $5 < k < 60$.

Нетрудно заметить, что между числами 5 и 60 находятся лишь два числа – 8 и 27, являющиеся точными кубами. Следовательно, имеем две возможности:

1) $169 \cdot 8 = 1352$; 2) $169 \cdot 27 = 4563$.

Действительно, $1352 \cdot 13 = 13 \cdot 13^2 \cdot 2^3 = 26^3 = 17\,576$; $4563 \cdot 13 = 13 \cdot 13^2 \cdot 3^3 = 39^3 = 59\,319$.

102. *Решение.* Из условия следует, что $\sin x + \frac{1}{\sin x} > 0$, откуда $\sin x > 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin x} - \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)^2 + 1 \geq 1,$$

$|\cos ax| \leq 1$.

Тогда равенство возможно тогда и только тогда, если $\begin{cases} \sin x = 1, \\ |\cos x| = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + +2\pi n, \\ ax = \pi k, \end{cases}$ откуда

$a = \frac{\pi k}{x} = \frac{2k}{1+4n}$, где $n, k \in Z$.

Ответ: $a = \frac{2k}{1+4n}$, $n, k \in Z$.

103. *Ответ:* 1) $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$; 2) $x = 8$, $y = 6$, $z = 10$.

Указание. Если x, y — катеты, z — гипотенуза, то согласно условию $\frac{1}{2}xy = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ и т. д.

104. *Ответ:* 61.

Указание. Использовать теорему Виета и формулу $x_1^5 - x_2^5 = (x_1 - x_2)(x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_2^4)$.

105. *Ответ:* $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-3}{6} + \pi n$, $a \in [-3; 9]$.

Указание. Использовать формулу $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Далее учесть, что $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и $|\cos 2x| \leq 1$.

106. *Ответ:* корней нет.

Указание. $x - 13 = (13 + x^2)^2$, и т. д.

107. *Ответ:* 15.

108. *Ответ:* $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Указание. Привести уравнение к виду

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 6x = 1.$$

Полученное уравнение равносильно двум системам

$$1)\ \begin{cases} \sin 6x = 1, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} \sin 6x = -1, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \end{cases}$$ и т. д.

109. *Ответ:* 75°.

Указание. Применить теоремы синусов и косинусов.

110. *Ответ:* $18\pi(2 - \sqrt{3})$ дм^2.

111. *Указание.* 120 см^2. Поставить пирамиду на одну из боковых граней.

112. *Ответ:* $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Указание. Учесть, что $|\sin x| \le 1$, тогда $\sin x = 1$, $\sin^7 x = 1$; $-\sin 7x = 1$, и т. д.

113. *Ответ:* 247; 364; 481; 715; 832.

114. *Решение.* Пусть $f(x) = x^2 - x + a$; $g(x) = x^3 + x + 90$. Тогда $f(0) = a$; $f(1) = a$; $g(0) = 90$; $g(1) = 92$. Значит, НОД (90; 92), т. е. 2 должен делиться на a. Кроме того, $f(-1) = a + 2$; $g(-1) = 88$, поэтому a не равно ни 1, ни -2; $f(-2) = a + 6$; $g(-2) = -8104$,

поэтому $a \neq -1$. Следовательно, $a = 2$ и $\frac{x^{13}+x+90}{x^2-x+2} =$
$= x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 17x^3 -$
$- 11x^2 + 23x + 45$.

115. *Ответ:* $x = 2$.

Указание. Разделить обе части уравнения на $(x - 1)^2 \neq 0$. Далее замена $\frac{x^2}{x-1} = y$, и т. д.

116. *Ответ:* 60°.

Указание. Использовать формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}bc \sin \angle A$ и теорему косинусов.

117. *Решение.* $T = \frac{2\pi k}{d}$, где $d =$ НОД $(4; 2; 6) = 2$, $k =$ НОК $(15; 21; 35) = 105$.

Следовательно, $T = \frac{2\pi \cdot 105}{2} = 105\pi$.

Ответ: 105π.

118. *Ответ:* 28 см.

Указание. $r = \frac{S_1}{p_1} = \frac{S_2}{p_2}$, где

$S_1 = \sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)}$,

$S_2 = \sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-x)}$,

где x — неизвестная сторона второго треугольника, $p_1 = 34$, $p_2 = \frac{42+x}{2}$.

Примечание автора. Редким примером «тупоугольных близнецов» служат треугольники со сторонами, равными соответственно 97, 169, 122 и 97, 169, 228. У каждого из них $r = 30$ (см. № 167 *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975).

Представляет интерес нахождение двух треугольников подобного вида, у которых равны радиусы описанной окружности.

119. *Ответ:* $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

Указание. Записать уравнение в виде $x - \sqrt{x-3} = \sqrt[4]{x-3}\,(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3})$. Далее разложить левую часть уравнения на множители.

120. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt[3]{x+45} = 1 + \sqrt[3]{x-16}. \qquad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в куб:

$x + 45 = 1 + 3\sqrt[3]{x-16} + 3\sqrt[3]{(x-16)^2} + x - 16$, или

$$\sqrt[3]{(x-16)^2} + \sqrt[3]{x-16} - 20 = 0. \qquad (2)$$

Заменой $\sqrt[3]{x-16} = t$ уравнение (2) приводится к виду $t^2 + t - 20 = 0$, корни которого $t_1 = 4$, $t_2 = -5$. Если $t = 4$, то $\sqrt[3]{x-16} = 4$, $x - 16 = 64$, $x_1 = 80$; если $t = -5$, то $\sqrt[3]{x-16} = -5$, $x - 16 = -125$, $x_2 = -109$.

Ответ: $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

II способ

Возведем обе части уравнения в куб, используя формулу $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$. Тогда получим $x + 45 - (x - 16) - 3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}\,(\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16}) = 1$, или $60 - 3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)} \cdot 1 = 0$, $\sqrt[3]{(x+45)(x-16)} = 20$; $(x + 45)(x - 16) = 8000$, откуда находим $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

III способ

Пусть $x + 45 = a^3$, $x - 16 = b^3$, тогда

$$a^3 - b^3 = 61. \qquad (1)$$

Кроме того, $a - b = 1$. (2)

Уравнения (1) и (2) решаем как систему.

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 61, \\ a - b = 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} a = 5, \\ b = 4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = -4, \\ b = -5. \end{cases}$$

Учитывая замены $x + 45 = a^3$, $x - 16 = b^3$, получим $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

Ответ: $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

121. *Ответ:* $\sqrt{2010} - 1$.

Указание. Умножить числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю.

122. *Ответ:* (4; 1), (1; 4).

123. *Решение.* Возведем в квадрат обе части данных равенств:

$$a^2 = \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y, \qquad (1)$$

$$b^2 = \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), получим

$$a^2 + b^2 = 2 + 2 \cos (x - y). \qquad (3)$$

Аналогично вычитая, находим

$a^2 - b^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^2 y - \cos^2 y) +$
$+ 2(\sin x \sin y - \cos x \cos y)$, или

$b^2 - a^2 = \cos 2x + \cos 2y + 2 \cos (x + y)$, или

$$b^2 - a^2 = 2 \cos (x + y) (\cos (x - y) + 1). \qquad (4)$$

Учитывая (3), имеем $2 \cos (x - y) = a^2 + b^2 - 2$,

$b^2 - a^2 = \cos (x + y) \cdot (2 \cos (x - y) + 2) =$
$= \cos (x + y) \cdot (a^2 + b^2 - 2 + 2) =$
$= (a^2 + b^2) \cos (x + y)$, откуда $\cos (x + y) = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$.

Так как $\cos(x-y)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)$, то

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}=\frac{(b^2-a^2)\cdot 2}{(a^2+b^2)(a^2+b^2-2)}.$$

Но $\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}=\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$, тогда

$$\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{2(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2-2)}.$$

Известно, что если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$,

тогда $\frac{2}{2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{(b^2+a^2)(a^2+b^2-2)+2(b^2-a^2)}{(b^2+a^2)(a^2+b^2-2)-2(b^2-a^2)}$, или

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{(a^2+b^2)^2-4b^2}{(a^2+b^2)^2-4a^2}=\frac{(a^2+b^2+2b)(a^2+b^2-2b)}{(a^2+b^2+2a)(a^2+b^2-2a)},$$

ч. т. д.

124. *Ответ:* при $0<a<4$.

Указание. Проще привести графическое решение.

125. *Ответ:* $x_1=3$, $x_2=-\sqrt[3]{15}$.

Указание. Данное уравнение равносильно двум смешанным системам:

1) $\begin{cases} x^3-2x\ge 0, \\ x^3-2x=2x+15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-2x<0, \\ x^3-2x=2x+15, \end{cases}$ и т. д.

126. *Решение.* Пусть $3x-2=t+1$, тогда

$x=\frac{1}{3}(t+3)$, $x-5=\frac{1}{3}t-4$ и $x+1=\frac{1}{3}(t+6)$.

Следовательно, I уравнение примет вид

$$f(t+1)+7g\left(\frac{t}{3}-4\right)=\frac{1}{3}(t+6),$$

т. е. $f(x+1)+7g\left(\frac{x}{3}-4\right)=\frac{1}{3}(x+6)$.

Решая это уравнение совместно со II уравнением исходной системы, имеем

$$\begin{cases} f(x+1)+7g\left(\frac{x}{3}-4\right)=\frac{1}{3}(x+6), \\ f(x+1)-g\left(\frac{x}{3}-4\right)=3x, \end{cases}$$

откуда, вычитая из первого уравнения второе, получим $8g\left(\frac{x}{3}-4\right)=\frac{x+6}{3}-3x$, **или**

$$g\left(\frac{x}{3}-4\right)=\frac{1}{12}(3-4x). \qquad (1)$$

Пусть $\frac{x}{3}-4=k$, $x=3(k+4)$, **тогда (1) примет вид**

$g(k)=\frac{1}{12}(3-12(k+4))$, **или** $g(k)=-\frac{1}{4}(4k+15)$,

т. е. $g(x)=-\frac{1}{4}(4x+15)$.

Из II уравнения последней системы имеем

$f(x+1)=-\frac{1}{12}(3-4x)=3x$,

$f(x+1)=\frac{1}{12}(32x+3)$,

$f(x+1)=\frac{1}{12}(32(x+1)-29)$,

т. е. $f(x)=\frac{1}{12}(32x-29)$.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{12}(32x-29)$, $g(x)=-\frac{1}{4}(4x+15)$.

127. *Ответ:* графиком является прямая $y = 5$.
Указание. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

128. *Решение.* Пусть в ΔABC основание $AB = 2x$, $AC = BC = y$, высота $CD = 12$ (по условию), тогда из ΔADC получим

$$y^2 - x^2 = 144. \qquad (1)$$

Известно, что $S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$, где $a = b = y$,

$c = AB = 2x$, тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{xy^2}{2R}$. (2)

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = pr = (x + y)r$. (3)

Кроме того, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = 12x$. (4)

Учитывая (4), соотношения (2) и (3) примут вид

$$\frac{xy^2}{2R} = 12x, \text{ или } y^2 = 24R,\ R = \frac{y^2}{24}. \qquad (5)$$

Аналогично из (3) имеем $(x + y)r = 12x$, откуда

$$r = \frac{12x}{x+y}. \qquad (6)$$

По условию задачи $R + r = \dfrac{83}{8}$, тогда, складывая (5) и (6), получим $\dfrac{12x}{x+y} + \dfrac{y^2}{24} = \dfrac{83}{8}$, или, учитывая (1), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{12x}{x+y} + \dfrac{y^2}{24} = \dfrac{83}{8}, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

Пусть $y = tx$, где $t > 0$, тогда получим

$$\begin{cases} \dfrac{12}{1+t} + \dfrac{t^2x^2}{24} = \dfrac{83}{8}, \\ x^2 = \dfrac{144}{t^2-1}. \end{cases}$$

Решая систему способом подстановки, получим $35t^2 - 96t + 13 = 0$, откуда $t_1 = \dfrac{13}{5}$, $t_2 = \dfrac{1}{7}$.

Учитывая подстановку $y = tx$, получим две системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = \dfrac{13}{5}x, \\ y^2 - x^2 = 144; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{7}x, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$

Из системы 1) имеем $x = 5$, $y = 13$. Система 2) не имеет решений. Итак, $x = 5$, $y = 13$, тогда $AB = 10$, $AC = BC = 13$.

Ответ: 10; 13; 13.

129. *Ответ:* $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + 2\pi k$; $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Указание. Используя формулу $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, данное уравнение примет вид $3\operatorname{tg}^2 x + 4 = \dfrac{7\sin x}{|\cos x|}$.

Далее рассмотреть 2 случая:

1) $\cos x > 0$; 2) $\cos x < 0$.

130. *Ответ:* $x = \dfrac{7\pi}{4}$.

Указание. 1) $\cos x < 0$; 2) $\cos x \geq 0$.

131. *Решение.* Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin\dfrac{5x}{4}=1,\\ \cos x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{5x}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=2\pi k;\end{cases}$

$2\pi k = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{8\pi n}{5}$, откуда $k = \dfrac{1}{5}(4n + 1)$.

Так как $k \in Z$, то $n = 1 + 5m$, тогда $x = 2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$.

132. *Ответ:* $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}(-1-\sqrt{13})\right] \cup$

$\cup \left[\dfrac{1}{3}(1+\sqrt{13}); +\infty\right)$.

Указание. После упрощений получим неравенство $3x^2 - 2|x| - 4 \geq 0$. Далее рассмотреть 2 случая: 1) $x \geq 0$; 2) $x < 0$.

133. *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$.

Указание. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим

$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1) = 0$, и т. д.

134. *Решение.* $7\sin\beta = 6\sin\beta + \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$, или $6\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) - \sin\beta =$
$= 2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$. (1)

С другой стороны, $7\sin\beta = 8\sin\beta - \sin\beta$, или $8\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) + \sin\beta =$
$= 2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha$. (2)

Разделив обе части (2) на (1), получим

$\dfrac{4}{3} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $3\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4\operatorname{tg}\alpha$,

ч. т. д.

135. *Ответ:* $\left(2; 3\frac{1}{3}\right)$.

136. *Ответ:* $(x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.

137. *Ответ:* $x = -1$.

Указание. После почленного возведения уравнения в куб и подстановки $\sqrt[3]{x-1}$ вместо $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$ получим уравнение $(3x + 1)(x - 1) = -(x + 1)^2$, и т. д.

138. *Решение.* $\begin{cases} 0 \le x^2 - 3 \le 1, \\ \arcsin\sqrt{x^2-3} > \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x^2 - 3 \le 1, \\ \sqrt{x^2-3} > \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le x^2 - 3 \le 1, \\ x^2 - 3 > \frac{3}{4}; \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} < x^2 - 3 < 1$. Тогда $\frac{15}{4} < x^2 \le 4$,

или $\frac{\sqrt{15}}{2} < |x| \le 2$. Значит, $|x| \le 2$, т. е. $-2 \le x \le 2$.

Из неравенства $|x| > \frac{\sqrt{15}}{2}$ получим $\left[\begin{array}{l} x > \frac{\sqrt{15}}{2}, \\ x < -\frac{\sqrt{15}}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left[-2; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{2}; 2\right]$.

139. *Решение.* Поскольку $y - 2x^2 - 1 \ge 0$, то $2x^2 + 1 \le y$, откуда $y \ge 1$, тогда $3^y \ge 3$. Так как $\cos x \le 1$, то $-3\cos x \ge -3$. Из данного неравенства следует, что $\sqrt{y-2x^2-1} \ge 0$. Учитывая полученные соотношения, имеем $3^y - 3\cos x + \sqrt{y-2x^2-1} \ge 0$, а по условию $3^y - 3\cos x + \sqrt{y-2x^2-1} \le 0$, значит, должно выполняться равенство

$3^y - 3\cos x + \sqrt{y-2x^2-1} = 0$, откуда

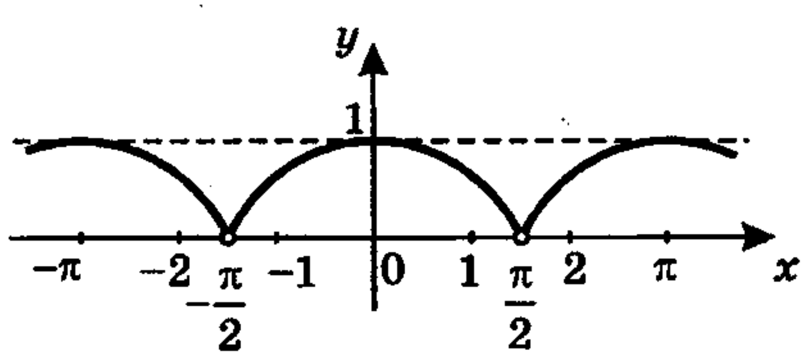
$$\begin{cases} 3^y = 3, \\ 3\cos x = 3, \\ \sqrt{y-2x^2-1} = 0. \end{cases}$$

Решением системы будет $x = 0$, $y = 1$.

Ответ: $x = 0$, $y = 1$.

140. *Решение.* $y = 1 \cdot \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$.

$$\begin{cases} \cos x \ne 0, \\ y = |\cos x|; \end{cases} \quad x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$



141. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде

$$\frac{3}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)} = \frac{48}{35}, \text{ или}$$

$$(1 + \cos^2 x)(1 + \sin^2 x) = \frac{35}{16}. \qquad (1)$$

Но $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, тогда уравнение (1) примет вид

$$\left(1+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(1+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)=\frac{35}{16}, \text{ или}$$

$(3+\cos 2x)(3-\cos 2x)=\dfrac{35}{4}$, откуда

$\cos^2 2x=\dfrac{1}{4}$, или $\dfrac{1+\cos 4x}{2}=\dfrac{1}{4}$;

$\cos 4x=-\dfrac{1}{2}$; $4x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$,

т. е. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

II способ

Пусть $1+\cos^2 x=a$, $1+\sin^2 x=b$, где $a>0$, и $b>0$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{48}{35}. \qquad (2)$$

Кроме того, $a+b=2+(\cos^2 x+\sin^2 x)=3$, или

$$a+b=3. \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) решаем как систему

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{48}{35},\\ a+b=3.\end{cases}$$

Решая систему способом подстановки, находим

$a_1=\dfrac{7}{4}$, $a_2=\dfrac{5}{4}$, тогда $b_1=\dfrac{5}{4}$, $b_2=\dfrac{7}{4}$.

Так как $1+\cos^2 x=a$, то $\cos^2 x=\dfrac{3}{4}$, или

$1+\cos 2x=\dfrac{3}{2}$, $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Аналогично $1+\cos^2 x=\frac{5}{4}$, $\cos^2 x=\frac{1}{4}$,

$1+\cos 2x=\frac{1}{2}$, $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

III способ

Поскольку $1=\cos^2 x+\sin^2 x$, то исходное уравнение примет вид

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{2\cos^2 x+\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{48}{35}. \qquad (4)$$

Разделив числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения (4) на $\cos^2 x\neq 0$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{2+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{2\operatorname{tg}^2 x+1}=\frac{48}{35}.$$

После упрощения получим биквадратное уравнение

$3\operatorname{tg}^4 x-10\operatorname{tg}^2 x+3=0$, откуда $\operatorname{tg}^2 x=3$,

$\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3}$. Если $\operatorname{tg}^2 x=3$, то $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$,

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$, если $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3}$, то $\operatorname{tg} x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

142. *Ответ:* $[-5;-4)\cup\left[-2-2\sqrt{\frac{3}{7}};-3\right)\cup$

$\cup\left(-1;-2+2\sqrt{\frac{3}{7}}\right]\cup(0;1]$.

Указание. Ввести замену $x^2 + 4x = t$, предварительно записав неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)\ge\frac{21}{20}.$$

143. *Ответ:* $2 \pm \sqrt{9+4n^2}$, $n = 0, 1 \ldots$

Указание. Так как $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$, то уравнение примет вид $\cos(\pi\sqrt{x^2-4x-5}) = 1$, которое равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} x^2-4x-5\ge 0,\\ \pi\sqrt{x^2-4x-5}=2\pi n,\end{cases}\quad n = 0.\ 1.\ \ldots,\ \text{и т. д.}$$

144. *Ответ:* $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$.

145. *Ответ:* $(1; 0)$, $\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Указание. Дважды возвести первое уравнение в квадрат.

146. *Решение.* Пусть в ΔABC ($\angle C = 90°$), $AB = c$, $AD = \frac{c}{\sqrt{3}}$ — биссектриса $\angle A$. Пусть $\angle CAD = \alpha = \angle DAB$.

Из ΔACD $AC = AD\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha$, из ΔABC $AC = AB\cos 2\alpha = c\cos 2\alpha$. Сравнивая правые части полученных равенств, имеем $\frac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha = \cos 2\alpha$, или $\sqrt{3}\cos 2\alpha - \cos\alpha = 0$. Поскольку $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, то полученное уравнение примет вид $2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0$, откуда

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ — не подходит, так как $\angle A < 90^\circ$, тогда $\cos\alpha > 0$.

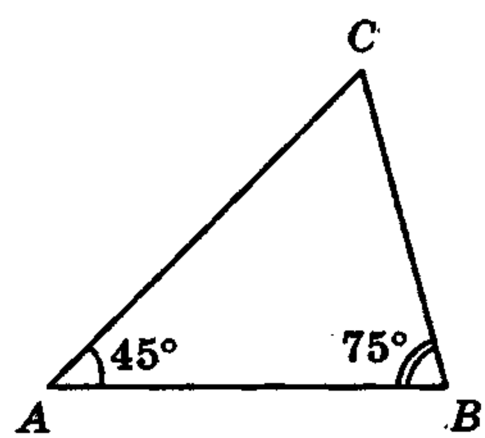
Если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha = 30^\circ$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle B = 30^\circ$. Следовательно, $AC = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}c$, $BC = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. Попытка решить задачу алгебраическим способом приводит к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, например,

$AC = x$, $BC = y$, $CD = z$, тогда $\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \dfrac{1}{3}c^2, \\ \dfrac{x}{c} = \dfrac{z}{y-z}, \end{cases}$ и т. д.

Ответ: $\dfrac{1}{2}c$, $\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

147. *Решение.* $\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$. Заметим, что ΔABC подобен треугольнику с вершинами в серединах его сторон с коэффициентом подобия $k = \dfrac{1}{2}$.



Значит, радиус окружности, описанной около ΔABC, равен $R = 2r$, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C =$$

$= \frac{1}{2}(2r\sin\angle B)\cdot(2r\sin\angle A)\cdot\sin\angle C =$

$= 2r^2\sin 75^\circ\cdot\sin 45^\circ\cdot\sin 60^\circ =$

$= 2r^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin(30^\circ + 45^\circ) =$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}r^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})r^2$ (кв. ед.).

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})r^2$.

148. *Ответ:* (1; 1).

Указание. Записать уравнение в виде $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2 = 2(x + y)$, откуда $x + y = \pm 1; \pm 2$. Далее записать уравнение в виде

$xy = \frac{(x+y)^3 - 2(x+y)+2}{3(x+y)}$, и т. д.

149. *Ответ:* $\sin 9 > \sin 10$.

Указание. Рассмотреть разность $\sin 10 - \sin 9$ и учесть, в какой угловой четверти находятся полученные углы.

150. *Решение.* Пусть $8x - x^2 - 12 = a$, $7 - 2x = b$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$. Заметим, что $6x - x^2 - 5 = (8x - x^2 - 12) + (7 - 2x) = a + b$, где $a + b \ge 0$.

В этом случае исходное неравенство примет вид $\sqrt{a+b} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$, если $a + b \ge a + b + 2\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab} \le 0$, $ab = 0$.

Следовательно, имеем две смешанные системы:

а) $\begin{cases} 8x - x^2 - 12 = 0, \\ 7 - 2x \ge 0; \end{cases}$ $x^2 - 8x + 12 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

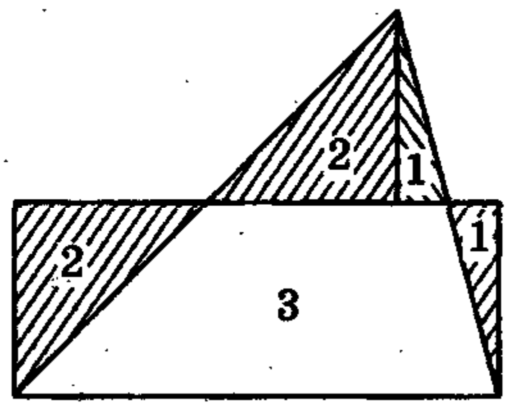
Так как $x \le 3{,}5$, то $x = 2$.

б) $\begin{cases} 7-2x=0, \\ 8x-x^2-12\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3{,}5, \\ x^2+8x+12\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3{,}5, \\ 2\le x\le 6, \end{cases}$

откуда $x = 3{,}5$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3{,}5$.

151. *Решение* (см. рис.).



152. *Ответ:* $x = \pi n$, $x = \pm\text{arctg}\,5 + \pi n$, $n \in Z$.

Указание. Применить формулу

$$\text{tg}\,3x = \frac{3\text{tg}\,x-\text{tg}^3 x}{1-3\text{tg}^2 x}.$$

153. *Решение.* По формуле суммы n членов геометрической прогрессии получим

$$x^{12} + x^{10} + x^9 + \ldots + x^2 + 1 = \frac{x^{14}-1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x^7-1}{x-1}\cdot\frac{x^7+1}{x+1} = (x^6 + x^5 + x^4 + \ldots + x + 1)\,(x^6 - x^5 + x^4 - \ldots - x + 1).$$

154. *Ответ:* 72.

Указание. $2x = a^2$, $3x = b^3$, т. е. $x = 2^3\cdot 3^2\cdot c = 72c \Rightarrow c = 1$.

155. *Решение.*

I способ

$S = \frac{1}{2}ab = pr = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, откуда

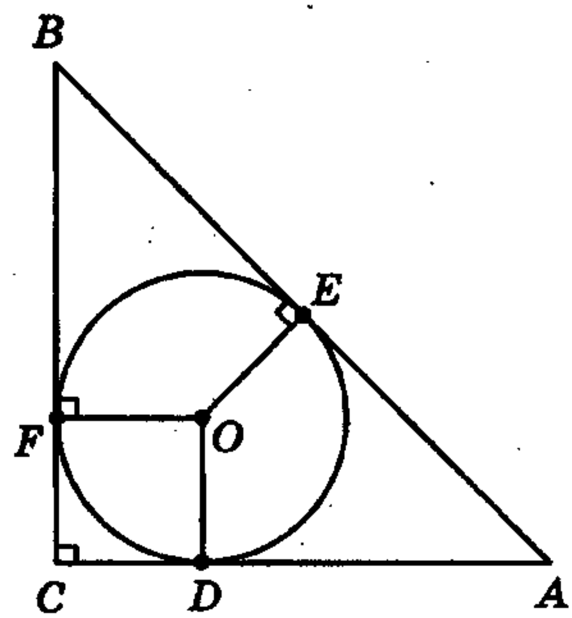
$$r = \frac{ab}{a+b+c}. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, или $(a + b)^2 - 2ab = c^2$, значит, $2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)\,(a + b - c)$, тогда (1) примет вид $r = \dfrac{2ab}{2(a+b+c)} =$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}, \text{ ч. т. д.}$$

II способ

Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD, OE и OF в точки касания, тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$, $OE \perp AB$. Следовательно, $CFOD$ — квадрат, тогда $OD = OF = OE = r$; $AD = AC - CD = b - r$; $BF = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки.



Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда $r = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$, ч. т. д.

156. *Решение.* В силу неравенства Коши

$$\sqrt{x^2+x-16} \le \frac{(x^2+x-16)+1}{2} = \frac{x^2+x-15}{2},$$

$$\sqrt{x-x^2+16} \le \frac{(x-x^2+16)+1}{2} = \frac{x-x^2+17}{2}.$$

Следовательно, $\sqrt{x^2+x-16} + \sqrt{x-x^2+16} \le x+1$.

Значит, из исходного уравнения следует, что $x^2 - 7x + 17 \le x + 1$ или $(x - 4)^2 \le 0$, т. е. $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

157. *Ответ:* 1.

Указание. Подставить в выражение, данное в условии, $x = 1$.

158. *Ответ:* 54 и 18.

159. *Решение.* Пусть $A = \overline{xyztxy}$ — искомое число. Вставленное двузначное число четное. Обозначив его через $2a$, получим

$A = \overline{xyztxy} = 10\,000a + 100 \cdot 2a + a = 10\,201a = 101^2a$.

Так как A — шестизначное число и a — точный квадрат, то $16 \le a \le 81$, откуда $a = 16; 25; 36; 49$. В этом случае получим соответственно 4 числа: $163\,216 = 404^2$; $255\,025 = 505^2$; $367\,236 = 606^2$; $499\,849 = 707^2$.

160. *Ответ:* 4001 и 8004.

161. *Ответ:* 3 : 8.

Указание. Учесть, что $\Delta AKD \sim \Delta EKD$, где точка K — точка пересечения DB и AE ($E \in CB$).

162. *Решение.* Если $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = 3$, тогда $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 3}{1-9} = -\dfrac{3}{4}$;

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{3+\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3-\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{12-3}{4+9} = \frac{9}{13}.$$

Ответ: 9/13.

163. *Ответ:* $x = 0$.

164. *Ответ:* $\dfrac{7}{25}$.

Указание. Разложить $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ на множители. Далее использовать формулы

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

165. *Ответ:* $x = 3$.

Указание. Замена $\sqrt{x+1} = y$, тогда после упрощений получим уравнение $(y^2 - 4y)^2 + 8(y^2 - 4y) + 16 = 0$ — квадрат суммы, и т. д.

II способ

Запишем уравнение в виде

$(x - 4\sqrt{x+1})^2 + 10(x - 4\sqrt{x+1}) + 25 = 0$, или

$(x - 4\sqrt{x+1} + 5)^2 = 0$, или $x - 4\sqrt{x+1} + 5 = 0$.

Полученное уравнение запишем в виде

$(\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0$, и т. д.

Ответ: $x = 3$.

166. *Ответ:* $\left(\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{9}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

167. *Ответ:* $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

Указание. Замена $\sqrt[3]{2-x} = t$, тогда $x - 1 = 1 - t^3$.

Получим $\sqrt{1-t^3} > 1 - t$, и т. д.

168. *Решение.* $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) = 37 = 1 \cdot 37$, причем $x - 3y < x < x^2 + 3xy + 9y^2$.

Значит, $\begin{cases} x-3y=1, \\ x^2+3xy+9y^2=37, \end{cases}$ откуда, решая способом подстановки, находим $x = 4$, $y = 1$.

Ответ: $x = 4$, $y = 1$.

169. *Ответ:* 54.

Указание. Разложить многочлен $M(x)$ на множители, а затем подставить значения $p(x)$ и $g(x)$.

170. *Ответ:* 351 и 459.

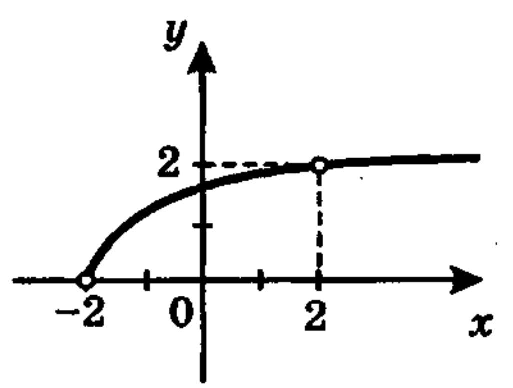
Указание. Согласно условию

$100x + 10y + z = 3(\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{xz})$, или

$40x = 23y + 5z$.

Далее учесть, что $0 \le y \le 9$, $0 \le z \le 9$, $0 \le x \le 9$, и т. д.

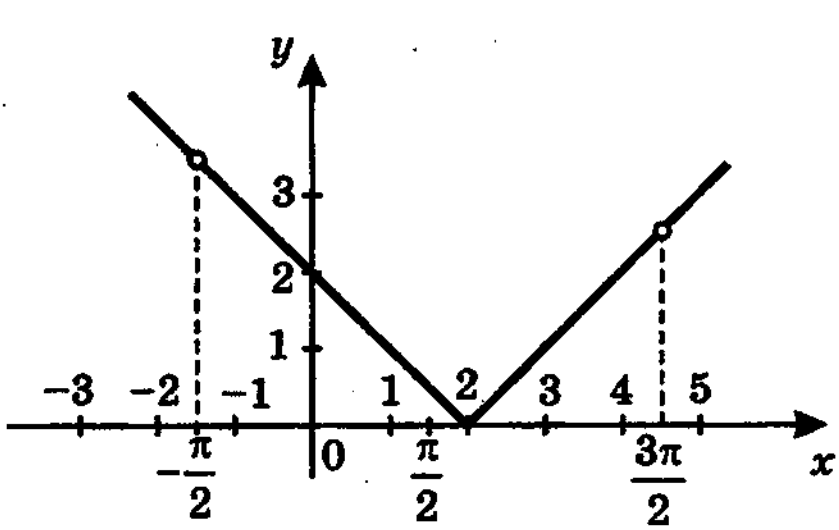
171. *Указание.* $y = \sqrt{x+2}$, $x \ne 2$, $x > -2$.



172. *Ответ:* 10 см.

173. *Указание.* Данную функцию привести к виду $y = |x - 2|$, где $\cos x \ne 0$, т. е.

$$\begin{cases} y = |x-2|, \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

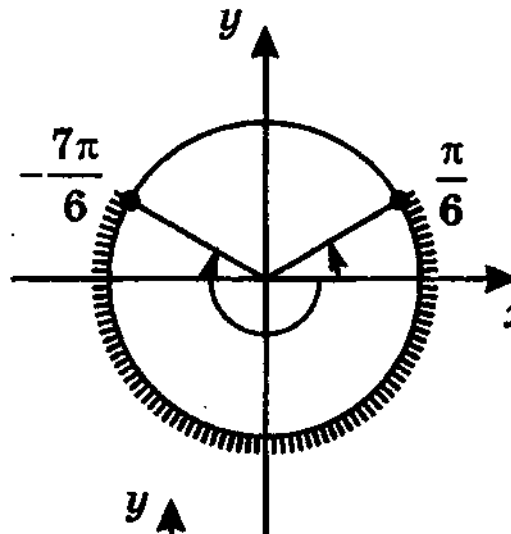


174. *Указание.* Неравенство приводится к виду

$\sin\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$, откуда

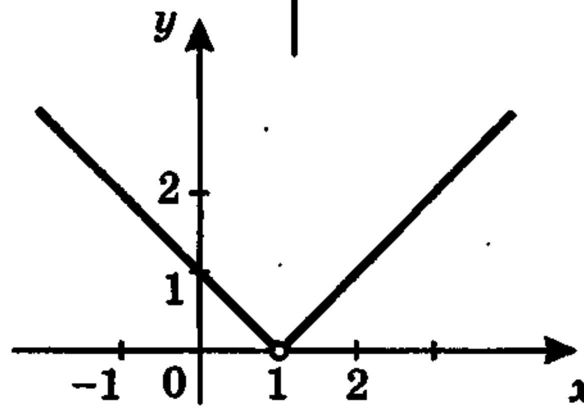
$4\pi n - \frac{7\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 4\pi n$,

$n \in Z$.



175. *Указание.* После преобразования получим

$$\begin{cases} y = |x-1|, \\ x \ne 1. \end{cases}$$



176. *Ответ:* $x_1 = 1$,
$x_2 = -0{,}5$.

Указание. Рассмотреть 2 случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$.

177. *Решение.* $y^2 = x^2(1 + x)$. Полагая $1 + x = a^2$, получим бесконечную серию решений $x = a^2 - 1$, $y = ax$.

178. *Ответ:* $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

179. *Ответ:* $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Решение. Преобразовать неравенство к виду $|3x - 1| > 1$, и т. д.

180. *Решение.*

I способ

Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, тогда $\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$; $\cos(\alpha + \beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} +$

$$+\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$$

$$= \operatorname{tg}\gamma\cdot\frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\gamma\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

II способ

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha +$$

$$+\operatorname{tg}\beta - \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\left(1-\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) =$$

$$= \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma)\cdot(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

III способ

Так как $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma)$.

$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$, или

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, или

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, ч. т. д.

181. *Ответ:* $\left[-\dfrac{\sqrt{10}}{2};\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

Указание. Имеем $\begin{cases} 0 \le x^2 - 2 \le 1, \\ \arcsin\sqrt{x^2-2} \le \dfrac{\pi}{6}, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 0 \le x^2 - 2 \le 1, \\ x^2 - 2 \le \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

182. *Ответ:* $a = \pm 2\sqrt{3}$.

Указание. Заменой $x = a + y$ первое уравнение системы привести к виду $4y^2 + 2ay + (a^2 - 1) = 0$, и т. д.

183. *Решение.*

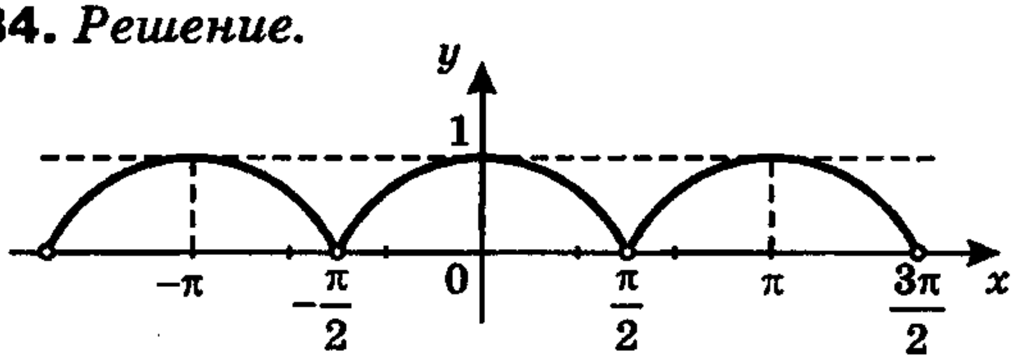
I способ

Применяя формулы $2 \sin x \cos y = \sin (x - y) + \sin (x + y)$ и $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, получим $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha (\sin (\alpha + 2\beta) - \sin \alpha) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin (\alpha + 2\beta) - \sin^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) + \dfrac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos (2\alpha + 2\beta)) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos (2\alpha + 2\beta)) = \sin^2 (\alpha + \beta)$, ч. т. д.

II способ

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \alpha = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 = \sin^2 (\alpha + \beta)$, ч. т. д.

184. *Решение.*



185. *Ответ:* $x = 8$.

Указание. Записать уравнение в виде

$$\sqrt[3]{1+\frac{56}{x}}+4\sqrt[3]{1+\frac{19}{x}}=8.$$

Далее замена $1+\dfrac{56}{x}=a^3$, $1+\dfrac{19}{x}=b^3$. Имеем систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{56}{x}=a^3-1,\\ \dfrac{19}{x}=b^3-1.\end{cases}$ Далее перемножить обе части уравнений и решить полученную систему (с учетом замен) $\begin{cases}19a^3-56b^3=-37,\\ a+4b=8,\end{cases}$ и т. д.

186. *Решение.*

I способ

В силу неравенства Коши

$$\sqrt{x^2-x-1}\le\frac{(x^2-x-1)+1}{2}=\frac{x^2-x}{2};$$

$$\sqrt{1-x-x^2}\le\frac{(1-x-x^2)+1}{2}=\frac{2-x-x^2}{2}.$$

Значит, левая часть неравенства не превосходит $1-x$, так как $\dfrac{x^2-x}{2}+\dfrac{2-x-x^2}{2}=1-x$.

Следовательно, $x^2+x+2\le 1-x$, или $(x+1)^2\le 0$, откуда $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

II способ

Известно, что $a_1a_2+b_1b_2\le\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ (неравенство Коши—Буняковского).

Тогда $1 \cdot \sqrt{x^2 - x - 1} + 1 \cdot \sqrt{1 - x - x^2} \leq$
$\leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{-2x} = 2\sqrt{-x}$.

Из коллинеарности векторов (1; 1) и
$(\sqrt{x^2 - x - 1}; \sqrt{1 - x - x^2})$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x - x^2}}, \text{ или}$$

$x^2 - x - 1 = 1 - x - x^2$, $x^2 = 1$, $x = -1$ $(x < 0)$.

III способ

Заметим, что $x^2 + x + 2 > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$. Тогда область определения уравнения равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 \geq 0, \\ 1 - x - x^2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{5}{4}, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ \left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

откуда находим $x \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

На полученном отрезке левая часть исходного уравнения является возрастающей функцией, а правая — убывающая. Значит, уравнение может иметь не более одного корня и $x = -1$ — единственный корень.

IV способ

Область определения уравнения

$$x \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \sqrt{t}.$$

Заметим, что $u + v - 2\sqrt{uv} = t$, или

$(x^2 - x - 1) + (1 - x - x^2) - 2\sqrt{uv} = x^2 + x + 2;$

$-2\sqrt{uv} = x^2 + 3x + 2$, или

$-2\sqrt{uv} = (x + 1)(x + 2)$,

поскольку $uv \geq 0$, то последнее равенство возможно, если $(x + 1)(x + 2) = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ (не удовлетворяет ОДЗ уравнения).

Итак, $x = -1$ — единственный корень исходного уравнения

Ответ: $x = -1$.

187. *Ответ:* $x_1 = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{6})$, $x_2 = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{2})$,

$$x_3 = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{3}).$$

Указание. Рассмотреть 2 случая:
1) $x \leq 0$; 2) $x > 0$.

188. *Решение.* $x^2 + y^2 + xy = (x - py)^2$, $y \in N$, откуда $x^2 + 2px = p^2y - y$, или $y = \dfrac{x(2p+1)}{p^2-1}$, где $p > 1$,

а x надо выбрать так, чтобы y было целым, что достигается, если положить $x = p^2 - 1$, $y = 2p + 1$.

В этом случае исходное равенство примет вид

$(p^2 - 1)^2 + (2p + 1)^2 + (p^2 - 1)(2p + 1) =$

$= p^4 + 2p^2(p + 1) + (p + 1)^2 = (p^2 + (p + 1))^2 =$

$= (p^2 + p + 1)^2 = \overline{aaa}^2$.

Подбором легко установить, что требуемое равенство выполняется при $p = 10$.

$(10^2 + 10 + 1)^2 = 111^2$, тогда $x = 10^2 - 1 = 99$,

$y = 2 \cdot 10 + 1 = 21$.

При этих значениях исходное равенство запишется в виде

$99^2 + 21^2 + 99 \cdot 21 = 111^2$.

Итак, $x = 99$, $y = 21$ — наименьшая пара.

Ответ: $x = 99$, $y = 21$.

189. *Указание.* Следует продолжить две пары плоскостей противоположных граней угла до пересечения и провести плоскость, параллельную двум получившимся прямым.

190. *Решение.* $3 + \cos x\,(6\cos x + a\sin x) = 1$, или $6\cos^2 x + a\sin x\cos x + 2 = 0$.

Поскольку $2 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$, то получим

$8\cos^2 x + a\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$ — однородное уравнение второй степени.

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим равносильное уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2\, x + a\,\mathrm{tg}\, x + 8 = 0.$$

Пусть $\mathrm{tg}\, x = t$, $t \in R$, тогда уравнение $2t^2 + at + 8 = 0$ имеет корни, если $D \geq 0$, т. е. $a^2 - 64 \geq 0$, $a^2 \geq 64$, $|a| \geq 8$, откуда $a \geq 8$ и $a \leq -8$. Следовательно, $a \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

191. *Решение.* Согласно условию имеем $\overline{abc} = 11k^2$, или $100a + 10b + c = 11k^2$, где $0 < a, b, c \leq 9$.

Полученное равенство запишем в виде

$$11(9a + b) + (a - b - c) = 11k^2. \qquad (1)$$

Чтобы (1) делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы $a - b + c$ делилось на 11, т. е. $a - b + c = 11m$.

Так как $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, то $-9 \leq 11m \leq 18$, откуда $m = 0$ или $m = 1$.

1. Если $m = 0$, то получим $\begin{cases} 11(9a + b) + 0 = 11k^2, \\ a - b + c = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 9a+b=k^2, \\ a-b+c=0, \end{cases}$$

или, складывая уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} 10a+c=k^2, \\ b=a+c, \end{cases} \quad a>0,$$

где $10 \le 10a + c \le 99$, или $10 \le k^2 \le 99$, т. е. $k^2 = 16$; 25; 36; 49; 64; 81.

Из этих значений получим трехзначные числа: 176, 275, 396, 891.

2. Если $m = 1$, то $11(9a + b) + 11 = 11k^2$, или

$$\begin{cases} 9a+b+1=k^2, \\ a-b+c=11; \end{cases} \quad \begin{cases} 10a+c+1=k^2+11, \\ b=a+c=11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a+c=k^2+10, \\ b=a+c-11. \end{cases}$$

Значит, $10 \le 10a + c \le 99$; $10 \le k^2 + 10 \le 99$; $0 < k^2 \le 89$, т. е. $k^2 = 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81$.

Из этих значений получим еще два числа: 539; 704.

Ответ: 176; 275; 396; 891; 539; 704.

192. *Решение.* $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = (121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n) + (12 \cdot 144^n - 12 \cdot 11^n) = 11^n(121 + 12) + 12(144^n - 11^n)$. Дальнейшее очевидно.

193. *Ответ:* $\left(\dfrac{2}{\lg 102}; 101\right)$.

194. *Решение.* $3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 = 3 + 3a^2 + 3a^4 - 1 - a^2 - a^4 - 2a^3 - 2a - 2a^2 = 2 + 2a^2 + 2a^4 - 2a^3 - 2a - 2a^2 = (a^2 - a)^2 + (a^2 - 1)^2 + (a - 1)^2 \ge 0$.

Замечание. Неравенство можно доказать иначе.

$1 + a^2 + a^4 = (1 + a)^2 - a^2 = (1 + a + a^2)(1 - a + a^2)$.

Так как $1 + a + a^2 > 0$, то доказательство исходного неравенства сводится к доказательству неравенства

$3(1 - a + a^2) \geq 1 + a + a^2$, или

$3(1 - a + a^2) - 1 - a - a^2 = 2(a - 1)^2 \geq 0$.

195. *Ответ:* $x = -1$.

196. *Ответ:* (4; 4).

197. *Решение.* Согласно условию задачи, при делении данных чисел на искомое получаются одинаковые остатки, значит, если мы вычтем одно число из другого, то разность разделится на искомое число без остатка.

$$\begin{array}{r} -\,200\,631 \\ 200\,513 \\ \hline 118 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,200\,749 \\ 200\,631 \\ \hline 118 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,200\,749 \\ 200\,513 \\ \hline 236 \end{array}$$

Найдем простые делители полученных чисел:

$118 = 2 \cdot 59$; $236 = 2 \cdot 2 \cdot 59$.

Как видим, единственный общий делитель полученных разностей равен 59, а общий остаток (нетрудно проверить) — 31.

Ответ: 59.

198. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Замена $3^x = t$, где $t > 0$. В результате получим: 1) $3^x = -3$; 2) $3^x = \dfrac{9}{x+2}$, и т. д.

199. *Ответ:* 4.

200. *Ответ:* 8567 и 8576.

Указание. Задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} c + d = 13, \\ 2cd = 156 - 9a, \end{cases}$ где $\overline{abcd} = 1000a +$

$+ 100b + 10c + d$ — искомое число. Далее доказать, что a — четное число.

201. *Ответ:* $x_1 = \dfrac{1}{9}$, $x_2 = 3$.

202. *Решение.* Заметим, что в левой части уравнения имеем возрастающую функцию, в правой — убывающую. А это означает, что уравнение может иметь не более одного корня. Поскольку $540 = 3^3 \cdot 4 \cdot 5$, то уравнение запишется в виде $5^{3x} \cdot 4^{4+x} \cdot 3^{16+x} = 5^{8-x} \cdot 4^{8-x} \cdot 3^{3(8-x)}$.

Нетрудно убедиться, что $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 2$.

203. *Ответ:* 56/9.

204. *Решение.* Если данное неравенство выполняется при $x \in (-2; 2)$, то оно, в частности, должно выполняться при $x = 0$. В этом случае неравенство примет вид $\dfrac{a^2}{7a} \geq 1$, откуда $a \geq 7$. Кроме того, поскольку $x \in (-2; 2)$, то $x + 7 > 0$.

Следовательно, исходное неравенство с учетом ограничений преобразуется к виду

$$x^2 + a^2 \geq a(x + 7), \text{ или } x^2 - ax + a^2 - 7a \geq 0. \quad (1)$$

Заметим, что абсцисса x_0 вершины параболы $y = x^2 - ax + a^2 - 7a$ равна $x_0 = \dfrac{a}{2}$, где $\dfrac{a}{2} > 1$, так как $a \geq 7$. Значит, неравенство (1) выполняется при всех $x \in (-2; 2)$, если оно выполняется при $x = 1$, т. е. $1 - a + a^2 - 7a \geq 0$, или $a^2 - 8a + 1 \geq 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов, находим $a \in (-\infty; 4 - \sqrt{15}\,] \cup [4 + \sqrt{15}\,; +\infty)$.

Учитывая, что $a \geq 7$, окончательно получим $a \in [4 + \sqrt{15}\ ; +\infty)$.

Ответ: $[4 + \sqrt{15}\ ; +\infty)$.

205. *Ответ:* 4.
Указание. $f(9) = -3$; $f(-7) = 4$; $f(6) = 3$.

206. *Ответ:* $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi m; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$,

$$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi m; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n,\ m \in Z$$

207. *Ответ:* $x_1 = 0$, $x_2 = 9$.
Указание. Замена $\sqrt{4-\sqrt{x}} = y$, тогда $x = (4 - y^2)^2$. В этом случае данное уравнение примет вид $16(2 - y)^2 (2 + y)^2 - 9(17 - y^2)(2 - y)^2 = 0$, и т. д.

208. *Ответ:* $1/\sqrt{e}$.

209. *Решение.*

I способ

Упростим числитель дроби: $3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = (1 + \cos 4\alpha) + (2 + 4\cos 2\alpha) = 2\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 2 = 2(1 + \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 2(1 + \cos 2\alpha)^2 = 2(2\cos^2\alpha)^2 = 8\cos^4\alpha$.

Аналогично упростим знаменатель дроби:

$3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = (1 + \cos 4\alpha) + (2 - 4\cos 2\alpha) = 2\cos^2 2\alpha + 2 - 4\cos 2\alpha = 2(1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 2(1 - \cos 2\alpha)^2 = 2(2\sin^2\alpha)^2 = 8\sin^4\alpha$.

Следовательно, $\dfrac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \dfrac{8\cos^4\alpha}{8\sin^4\alpha} = \operatorname{ctg}^4\alpha$, ч. т. д.

II способ

$3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = (4 + 4\cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = 4(1 + \cos 2\alpha) - 2\sin^2 2\alpha =$

$= 4 \cdot 2\cos^2\alpha - 2(\sin 2\alpha)^2 = 8\cos^2\alpha -$
$- 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 8\cos^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) =$
$= 8\cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 8\cos^4\alpha.$

Аналогично $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha =$
$= (4 - 4\cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = 4(1 - \cos 2\alpha) -$
$- 2\sin^2 2\alpha = 8\sin^2\alpha - 2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$
$= 8\sin^2\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = 8\sin^4\alpha$, и т. д.
(см. I способ).

III способ

$3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha +$
$+ \cos 2\cdot(2\alpha) = 3 + 4\cdot(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos^2 2\alpha -$
$- 1 = 3 + 8\cos^2\alpha - 4 + 2(\cos 2\alpha)^2 - 1 = -2 +$
$+ 8\cos^2\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 = -2 + 8\cos^2\alpha +$
$+ 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 2 = 8\cos^4\alpha.$

Аналогично упрощаем и знаменатель дроби, и т. д.

IV способ

$3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha +$
$+ (2\cos^2 2\alpha - 1) = 2 + 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha =$
$= 2(1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 2\cdot(1 + \cos 2\alpha)^2 =$
$= 2(2\cos^2\alpha)^2 = 8\cos^4\alpha$, и т. д. (см. I способ).

210. *Ответ:* нет решений.

211. *Ответ:* $x = -1$.

Указание. Ввести подстановки $\dfrac{7}{x} + 1 = a^3$;

$\dfrac{9}{x} - 1 = b^3$. Далее исключить переменную x.

212. *Решение.* Так как $x + 2y + 3z = a$, то

$z = \dfrac{a}{3} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{3}y$, и первое уравнение примет вид

$2\left(x + y + \dfrac{a}{3} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{3}\right) = 4x^2 + y^2$, или

$4x + 2y + 2a = 12x^2 + 3y^2$, или

$$\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{9}-\frac{2a}{3}=0.$$

Отсюда видно, что условию задачи удовлетворяет тройка чисел (x, y, z), если $\frac{2}{9}+\frac{2a}{3}=0$, откуда $a=-\frac{1}{3}$.

Ответ: при $a=-\frac{1}{3}$.

213. *Решение.* Нетрудно заметить, что

$\log_3(4-|\sin ax|)\ge 1$, а $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$.

Следовательно, равенство выполняется при условии $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ и $|\sin ax|=1$.

Если $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=1$, то $\pi x-\frac{\pi}{4}=2\pi n$, откуда $x=\frac{1}{4}+2n$, $n\in Z$, и поскольку $x\in[4;5]$, то $x=\frac{17}{4}$ — единственный корень.

Значения $a\in(3;5)$ находим, решив уравнения $\left|\sin\frac{17a}{4}\right|=1$, или $\sin^2\frac{17a}{4}=1$, откуда $\cos^2\frac{17a}{4}=0$, $\cos\frac{17a}{4}=0$, $\frac{17a}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, т. е. $a=\frac{2\pi}{17}(1+2n)$, $n\in Z$.

По условию $a \in (3; 5)$, т. е. $3 < \frac{2\pi}{17}(1 + 2n) < 5$, или $\frac{51-2\pi}{4\pi} < n < \frac{85-2\pi}{4\pi}$.

Так как $n \in Z$, то подходят значения

$a_1 = \frac{2\pi}{17}(1 + 2 \cdot 4) = \frac{18\pi}{17}$;

$a_2 = \frac{2\pi}{17}(1 + 2 \cdot 5) = \frac{22\pi}{17}$;

$a_3 = \frac{2\pi}{17}(1 + 2 \cdot 6) = \frac{26\pi}{17}$ (получены при $n = 4; 5; 6$).

Тогда $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{66\pi}{17}$.

Ответ: $\frac{66\pi}{17}$.

214. *Ответ:* arccos 0,8.

215. *Ответ:* нет корней.

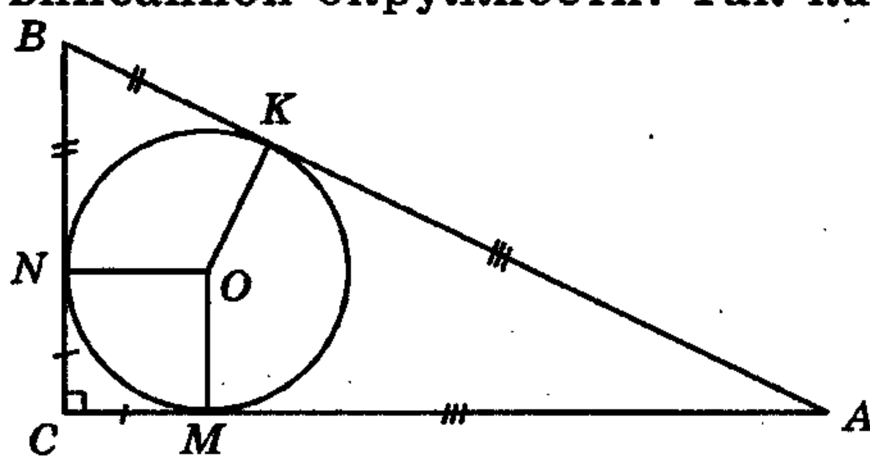
Указание. Преобразовать уравнение к виду

$$\frac{\log_{x+3}(x^3-7x+5)}{\log_{x+3}(x-3)} = 3, \text{ и т. д.}$$

216. *Решение.*

I способ

Пусть в ΔABC ($\angle C = 90^\circ$) $OM = ON = OK = r$ — радиус вписанной окружности. Так как ΔABC



прямоугольный, то AB — диаметр описанной окружности, тогда $AB = 2R$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r$, где p — полупериметр. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $AC + BC = 2r + AB$, тогда $S = \frac{1}{2}(2r + 2AB)r = (r + AB)r = (r + 2R)r$. Итак, $S = (2R + r)r$, ч. т. д.

II способ

Так как ΔABC прямоугольный, то $AB = 2R$, тогда $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC$. Пусть $AC = x$, $BC = y$, тогда $S = \frac{1}{2}xy$.

Из ΔABC $x^2 + y^2 = 4R^2$. (1)

Известно, что $r = \frac{1}{2}(x + y - 2R)$, откуда

$x + y = 2(R + r)$. (2)

Из (1), (2) имеем систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2, \\ x + y = 2(R + r). \end{cases}$

Из I уравнения имеем $(x + y)^2 - 2xy = 4R^2$, или, учитывая (2), получим $4(R + r)^2 - 2xy = 4R^2$, откуда $\frac{1}{2}xy = (R + r)^2 - R^2$, или $S = r(2R + r)$, ч. т. д.

217. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Записать уравнение в виде

$(4^x)^3 - (3^x)^2 = 3((4^x)^2 \cdot 3^x - 4^x \cdot (3^x)^2)$.

Далее обозначить $4^x = a$, $3^x = b$, и т. д.

218. *Ответ:* $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.

219. *Ответ:* $\left[\frac{9-\sqrt{417}}{12};\frac{11-\sqrt{485}}{14}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{13+\sqrt{449}}{14};\frac{9+\sqrt{417}}{12}\right].$

220. *Ответ:* $x = 4$, $y = 4$, $z = 1$.

Указание. Учесть, что $10 \le \sqrt{xyz} \le 31$, тогда $z \le 3$, т. е. $z = 1; 2; 3$, и т. д.

221. *Решение.* ОДЗ: $0 \le x \le 4$. Запишем уравнение в виде $(x-1)\sqrt{x} = 2\sqrt{x^2-2x+2} - \sqrt{4-x}$. (1)

Возведем обе части (1) в квадрат:

$(x-1)^2 x = 4(x^2-2x+2) + (4-x) -$

$-4\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)}$,

или $4\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)} = -x^3+6x^2-10x+8+4$.

Но $-x^3+6x^2-10x+8 = (x^2-2x+2)(4-x)$, тогда получим

$4\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)} = (x^2-2x+2)(4-x)+4$. (2)

Пусть $\sqrt{(x^2-2x+2)(4-x)} = y$, где $y \ge 0$, тогда уравнение (2) преобразуется к виду $y^2-4y+4=0$, или $(y-2)^2=0$, откуда $y=2$.

Учитывая замену, имеем $(x^2-2x+2)(4-x)=4$, или $x^3-6x^2+10x-4=0$. (3)

Заметим, что $x = 2$ — корень уравнения (3), тогда получим $(x-2)(x^2-4x+2)=0$, откуда $x_1=2$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$. Найденные корни удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$.

222. *Ответ:* $x = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{7}}$.

Указание. Преобразовать уравнение к виду $(x-1)^3 = 7x^3$, откуда $x - 1 = \sqrt[3]{7}\,x$, и т. д.

223. *Ответ:* $(-1; 0)$, $(1; 2)$.

Указание. Умножить и разделить левую часть второго уравнения на $\sqrt{y} - \sqrt{y-2x}$. В результате упрощения получим систему уравнений

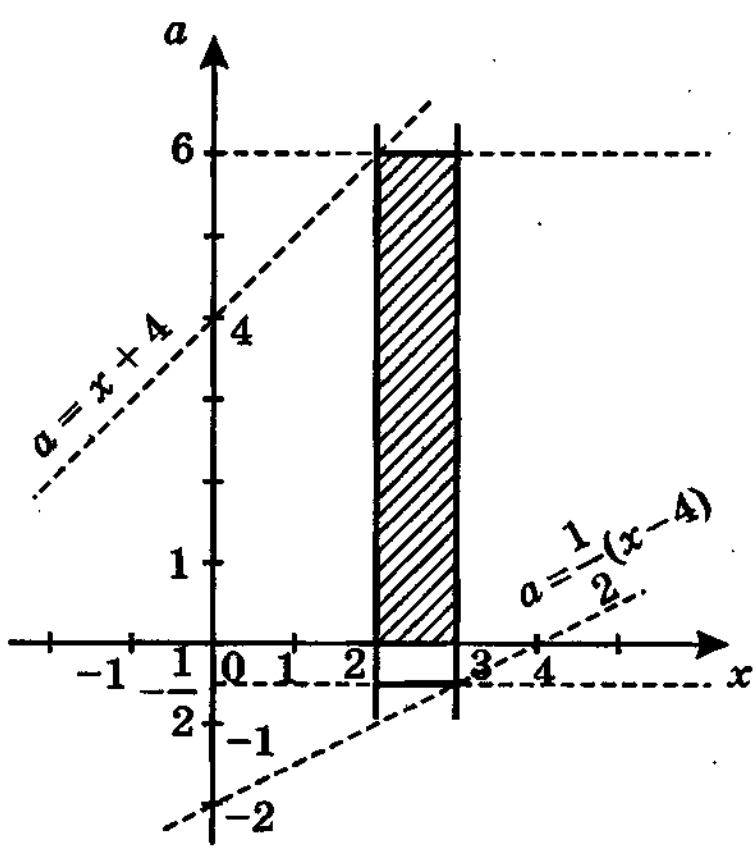
$$\begin{cases}\sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2},\\ \sqrt{y}-\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}x.\end{cases}$$

Далее сложить уравнения системы, получим $y = \dfrac{1}{2}(1+x)^2$. В этом случае I уравнение исходной системы примет вид

$$13\left(\frac{1}{2}(1+x)^2 - x\right) = 7x^4 + 6, \text{ и т. д.}$$

224. *Ответ:* $(3; 1)$, $(1; 3)$.

225. *Решение.* На плоскости xOa изобразим множество пар (x, y), для которых выполняется данное неравенство. Искомые значения a_0 характеризуются тем, что отрезок прямой $a = a_0$ при $x \in [2; 3]$ полностью принад-



лежит заштрихованной области, что достигается при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 6\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$

226. *Решение.* Заметим, что $4x^2 + 4x + 3 = (2x + 1)^2 + 2$ и $x^2 - 4x + 6 = (2 - x)^2 + 2$, тогда

$$\sqrt{(2x+1)^2+2} \cdot \operatorname{arctg}(2x+1) - \sqrt{(2-x)^2+2} \cdot \operatorname{arctg}(x-2) = 0.$$

Функция $f(t) = \sqrt{t^2+2} \cdot \operatorname{arctg} t$ монотонно возрастающая. Следовательно, последнее равенство означает, что при $t_1 = 2x + 1$ и $t_2 = x - 2$ значения функции совпадают, что возможно при условии, если $t_1 = t_2$, т. е. $2x + 1 = x - 2$, откуда $x = -3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = -3$.

227. *Ответ:* $\frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

228. *Ответ:* $f(x) = \frac{1}{12}(32x - 29)$,

$$g(x) = -\frac{1}{4}(4x + 15).$$

229. *Решение.* Так как $16 + 6x - x^2 = 25 - (x - 3)^2$, то $\log_5(16 + 6x - x^2) = \log_5(25 - (x - 3)^2) \le \log_5 25 = 2$.

Кроме того, $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{4} \ge 2$.

Следовательно, обе части уравнения одновременно выполняются лишь при $x = 3$, так как $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} = \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 1$ и $\operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{4} = 1$.

Итак, $x = 3$ — корень исходного уравнения.

230. *Ответ:* 4.

231. *Решение.* Из условия следует, что $x > 0$ и $9x^2 - 1 > 0$, откуда $x > \frac{1}{3}$.

Запишем уравнение в виде

$$1 + \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}} = \frac{35}{36x}. \qquad (1)$$

Существует единственное значение $0 < t < \frac{\pi}{2}$, такое, что $x = \frac{1}{3\sin t}$, тогда $\sqrt{9x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = \frac{\cos t}{\sin t}$, где $\cos t > 0$, $\sin t > 0$, так как $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

В этом случае уравнение (1) примет вид

$1 + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{35}{12}\sin t$, если

$12(\cos t + \sin t) = 35 \sin t \cos t. \qquad (2)$

Пусть $\sin t + \cos t = y$, тогда $y^2 = 1 + 2\sin t\cos t$, откуда $\sin t\cos t = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$, и уравнение (2) преобразуется к виду $12y = \frac{35}{2}(y^2 - 1)$, или $35y^2 - 24y - 35 = 0$, откуда $y_1 = -\frac{5}{7}$, $y_2 = \frac{7}{5}$.

Поскольку $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $y > 0$, тогда $y = \frac{7}{5}$.

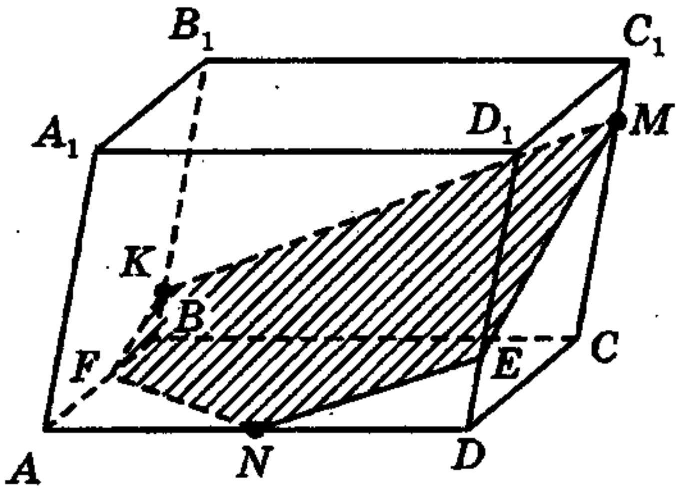
Получим систему уравнений $\begin{cases} \sin t + \cos t = \frac{7}{5}, \\ \sin t \cos t = \frac{12}{5}, \end{cases}$

откуда находим $\left[\begin{array}{l}\sin t=\dfrac{3}{5},\\ \sin t=\dfrac{4}{5}.\end{array}\right.$

Так как $x=\dfrac{1}{3\sin t}$, то $x_1=\dfrac{5}{9}$, $x_2=\dfrac{5}{12}$.

Ответ: $x_1=\dfrac{5}{9}$, $x_2=\dfrac{5}{12}$.

232. *Ответ:* (см. рис.). Пятиугольник $KMENF$ — искомое сечение.



233. *Ответ:* 1.

Указание. Установить, что данное число — корень уравнения $x^3+3x-4=0$.

234. *Ответ:* $x=2$.

Указание. Исходное уравнение записать в виде

$$\left(\frac{50505}{131313}\right)^x+\left(\frac{121212}{131313}\right)^x=1. \qquad (1)$$

Далее исследовать на монотонность функцию в левой части уравнения (1), и т. д.

235. *Ответ:* -1.

Указание. Привести выражение к виду

$$\sqrt[3]{(\sqrt[3]{13}-1)^3}-\sqrt[3]{13}.$$

236. *Ответ:* $8833 = 88^2 + 33^2$.

Указание. Имеем $\overline{xxyy} = 1100x + 11y$. По условию $1100x + 11y = (11x)^2 + (11y)^2$, или $99x + (x + y) = 11(x^2 + y^2)$. Значит, $x + y$ кратно 11, и т. д.

237. *Ответ:* 35.

Указание. $\frac{n(n-3)}{2}$, где n — число диагоналей.

238. *Ответ:* $(0; 0)$, $(-4; 2)$, $(-2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $(-2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$.

239. *Решение.* Графики функций $y = \sin x$ и $y = ax$ проходят через начало координат и симметричны относительно начала координат. Следовательно, число корней данного уравнения нечетно, а 2010 — четное, ч. т. д.

240. *Решение.* Заметим, что выражение в I скобке есть сумма $(n + 1)$ членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1$, $q = 10$, $b_n = 10^n$, тогда

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1).$$

Значит, данное число можно представить в виде

$$\frac{10^{n+1}-1}{9} \cdot (10^{n+1} + 35) + 36, \text{ или}$$

$$\frac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+35)+9\cdot 36}{9} =$$

$$= \frac{10^{2(n+1)}+34\cdot 10^{n+1}-35+324}{9} =$$

$$= \frac{10^{2(n+1)}+34\cdot 10^{n+1}+17^2}{9} = \left(\frac{10^{n+1}+17}{3}\right)^2.$$

Поскольку $10^{n+1} + 17$ кратно 3, то искомое число есть точный квадрат, ч. т. д.

241. *Ответ:* 1) 20 рублевых и 20 четырехрублевых; 2) 28 рублевых, 9 четырехрублевых и 3 двенадцатирублевых.

242. *Указание.* Если $\sin x + \cos x = 1$, то $\sin x \cos x = 0$. Далее использовать формулу $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

243. *Ответ:* 23.

244. *Ответ:* $x^3 + x^2 + x + 2013 = -91(x + 7)^3 + 716(x + 7)^2 - 510(x + 7) + 1712$.

Указание. Имеет место тождество $x^3 + x^2 + x + 2013 = A(x + 7)^3 + B(x + 7)^2 + C(x + 7) + D$.

Далее раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях.

245. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 2$.

Указание. Учесть, что $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, и т. д.

246. *Решение.* Пусть $x^7 = y$, тогда $x^{28} = y^4$, $x^{21} = y^3$. Имеем $2y + y^4 = 3y^3$, или $y(y^3 - 3y^2 + 2) = 0$, или $y(y - 1)(y^2 - 2y - 2) = 0$, откуда $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \sqrt[7]{1 \pm \sqrt{3}}$.

247. *Ответ:* $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1)$.

248. *Решение.* Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{x^2 + 9y^2}{2xy} + \frac{18xy}{x^2 + 9y^2} = 6. \qquad (1)$$

Пусть $\frac{x^2 + 9y^2}{2xy} = t$, тогда (1) примет вид $t + \frac{9}{t} = 6$, или $(t - 3)^2 = 0$, откуда $t = 3$, тогда $\frac{x^2 + 9y^2}{2xy} = 3$, или $(x - 3y)^2 = 0$, $x = 3y$.

Следовательно, данное выражение запишется в виде $(x-7)^2 + 3xy = (x-7)^2 + x^2 = 2x^2 - 14x + 49$. Поскольку графиком квадратного трехчлена является парабола, то наименьшее значение данного выражения достигается в вершине параболы при $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

249. *Ответ:* $r = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$.

Указание. Доказать, что треугольник прямоугольный.

250. *Ответ:* $(0;\ 1) \cup (1;\ \sqrt[10]{10})$.

251. *Указание.* Запишем данное число в виде

$$(29^n - 16^n + (19^n - 6^n) + (15^n - 2^n).$$

Поскольку разность одинаковых степеней делится на разность оснований, то каждое из чисел в скобках делится на 13, а значит, и данное число кратно 13, ч. т. д.

252. *Решение.* Так как $a + b + c = 0$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc). \qquad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат:
$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc +$
$+ 2ab^2c + 2abc^2)$, или
$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 +$
$+ 2abc(a + b + c))$, или

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \qquad (2)$$

С другой стороны, $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 +$
$+ 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. (3)
Из (2) и (3) получим
$4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = a^4 + b^4 + c^4 +$
$+ 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$, откуда $2(a^4 + b^4 + c^4) =$
$= a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$,
или $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$, ч. т. д.

253. *Ответ:* $x = -1$.

Указание. Умножить обе части уравнения на 4, а затем вычесть по единице.

254. *Ответ:* $(-1; -2)$, $(2; 1)$.

Указание. Умножить обе части II уравнения на 4, а затем вычесть из I уравнения системы полученное.

255. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

Указание. Привести данное уравнение к виду $\frac{(3x+1)^2}{x} = 8 \cdot \frac{3x+1}{\sqrt{x}} - 16$, $x > 0$.

Далее замена $\frac{(3x+1)^2}{x} = y$, и т. д.

256. *Ответ:* $(1; 1)$, $(9; 3)$.

257. *Указание.* Показать, что выражение $\frac{(2p+2)(2p+1)\cdot 2p}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{2p(p+1)(2p+1)}{3}$ — число целое.

Но по условию задачи p и $2p + 1$ — числа простые, значит, $p + 1$ делится на 3, а поэтому $4p + 1 = 3p + (p + 1)$ — число составное, ч. т. д.

258. *Указание.* Заметим, что $\frac{x^2 - 3x + 4}{49} = \left(\frac{x+2}{7}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{7x}{49}}\right)^2$. $x + 2$ может делиться на 7 только в том случае, когда x делится на 7, а $7x$ может делиться на 49 только в том случае, если x делится на 7. Аналогично доказывается в остальных случаях.

259. *Ответ:* $7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

260. *Ответ:* $\frac{97}{6}\sqrt[3]{18}$.

261. *Ответ:* $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{72}+4)$.

262. *Ответ:* $(x+y+z)^3=27xyz$.

Указание. Записать уравнение в виде $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=$
$=-\sqrt[3]{z}$.

Далее возвести обе части в куб, используя формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

263. *Указание.* $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1+2+\ldots+n}{n}=$
$=\frac{n(n+1)}{2n}$, и т. д.

264. *Решение.* $n^5-n=n(n^2-1)(n^2+1)$.

Если n не делится на 5, то число имеет вид $5k\pm 1$, $5k\pm 2$, тогда $n^2=(5k\pm 1)^2=25k^2+10k+1$ и $n^2=(5k\pm 2)^2=25k^2\pm 20k+4$, т. е. n^2-1 кратно 5, или n^2+1 кратно 5. Значит, либо n^2-1, либо n^2+1 делится на 5.

265. *Решение.* Неполное частное

$$x=\frac{7\cdot 19a\cdot 29-39}{41}=94a-1+\frac{3a+2}{41}.$$

Наименьшее натуральное a, при котором $\frac{3a+2}{41}$ — целое число, $a=13$. При этом $x=1222$.

Значит, искомое число будет равно

$(1222\cdot 41+39):29=1729$.

266. *Решение.* Вычитая $\frac{1}{2}(17-13)=2$ из каждого члена ряда, получим $-15+15-15+15-$

$-15+15-\ldots$ Следовательно, n-й член данного ряда равен $2+15\cdot(-1)^n$.

267. *Указание.* Пусть $a=\operatorname{tg}A$, $b=\operatorname{tg}B$, $c=\operatorname{tg}C$, тогда по формуле тангенса разности получим $\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=0$, или $(a-b)(b-c)(c-a)=0$, откуда и следует, что исходный треугольник равнобедренный.

Замечание. Можно было воспользоваться соотношением $A+B+C=\pi$.

268. *Ответ:* $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$.

Указание. Привести уравнение к виду

$$\left(\frac{x^2+x}{x-1}\right)^2-3\cdot\frac{x^2+x}{x-1}=4.$$

Далее замена $\frac{x^2+x}{x-1}=y$, и т. д.

269. *Решение.* Умножим обе части данного равенства на $x\sqrt{x}-\sqrt{x^3-1}$, тогда после упрощений получим

$$y\sqrt{y}+\sqrt{y^3-1}=x\sqrt{x}-\sqrt{x^3-1}. \qquad (1)$$

Аналогично, умножая обе части на $y\sqrt{y}-\sqrt{y^3-1}$, получим

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-1}=y\sqrt{y}-\sqrt{y^3-1}. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), имеем

$2\left(\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}\right)=0$, откуда

$\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}=0$, ч. т. д.

270. *Решение.* Заметим, что $\operatorname{tg}25^\circ\cdot\operatorname{tg}35^\circ=$

$=\operatorname{tg}(30^\circ-5^\circ)\cdot\operatorname{tg}(30^\circ+5^\circ)=$

$$= \frac{\operatorname{tg}30^\circ - \operatorname{tg}5^\circ}{1+\operatorname{tg}30^\circ \operatorname{tg}5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}30^\circ \operatorname{tg}5^\circ} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 30^\circ \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \frac{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}.$$

Кроме того, $\operatorname{tg} 15^\circ = \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \dfrac{\sin(3\cdot 5^\circ)}{\cos(3\cdot 5^\circ)}$.

Но $\sin(3 \cdot 5^\circ) = \sin 5^\circ \cdot (3 - 4\sin^2 5^\circ)$ и $\cos(3 \cdot 5^\circ) =$ $= \cos 5^\circ \cdot (4\cos^2 5^\circ - 3)$, тогда $\operatorname{tg} 15^\circ =$

$$= \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \frac{4\cos^2 5^\circ - 1}{4\cos^2 5^\circ - 3} = \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \frac{4\cdot\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 5^\circ} - 1}{4\cdot\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 5^\circ} - 3} =$$

$$= \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \frac{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ =$

$$= \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \frac{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \operatorname{tg} 85^\circ =$$

$= \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ = 1$, ч. т. д.

271. *Решение.* Пятизначные числа, оканчивающиеся цифрой 6, делятся на 3 в том и только в том случае, если четырехзначное число, полученное при отбрасывании последней цифры, делится на 3. Четырехзначных чисел будет всего $9999 - 999 = 9000$. Заметим, что каждое третье из них делится на 3. Значит, существует 3000 четырехзначных чисел, кратных 3, и ровно столько же пятизначных чисел, которые оканчиваются на 6 и делятся на 3.

272. *Решение.* Заметим, что $x = \dfrac{1}{3}$ — корень уравнения. Докажем, что других корней исходное уравнение не имеет. При $x > -\frac{1}{3}$ функции $y_1(x) = 8^x$ и $y_2(x) = 3x + 1$ принимают положительные значения и возрастают, значит, левая часть уравнения также является возрастающей функцией. Тогда на промежутке $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ уравнение не может иметь более одного корня. Далее при $x \le -\frac{1}{3}$ имеем $y_1(x) > 0$, $y_2(x) \le 0$.

Значит, $y_1(x) \cdot y_2(x) \le 0$, т. е. на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ уравнение не имеет корней.

Итак, $x = \frac{1}{3}$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

273. *Решение.* При делении на 3 квадрат целого числа дает остаток 0, если число делится на 3, и остаток 1, если число не делится на 3. Если бы ни a, ни b не делились на 3, то остаток от деления числа $a^2 + b^2$ на 3 был бы равен 2, что в силу приведенного выше замечания невозможно, так как сумма $a^2 + b^2$ равна по условию c^2. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3, ч. т. д.

11 класс

1. *Указание.* Учесть, что $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, и т. д.

2. *Решение.* Заметим, что $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,

тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{x+2009} - \frac{1}{x+2010} + \frac{1}{x+2010} - \frac{1}{x+2011} +$$
$$+ \frac{1}{x+2011} - \frac{1}{x+2012} + \frac{1}{x+2012} - \frac{1}{x+2013} =$$
$$= \frac{1}{999999}, \text{ или } \frac{1}{x+2009} - \frac{1}{x+2013} = \frac{1}{999999},$$
$$\frac{4}{(x+2009)(x+2013)} = \frac{1}{999999}.$$

Пусть $x + 2011 = y$, тогда получим
$y^2 = 4\,(999\,999 + 1)$, или $(x + 2011)^2 = 4 \cdot 10^6$,
откуда $x + 2011 = \pm\, 2000$.
Значит, $x_1 = -11$, $x_2 = -4011$.
Ответ: $x_1 = -11$, $x_2 = -4011$.

3. *Ответ:* -4; $\pm\, 3$; 6.
Указание. Запишем уравнение в виде $\dfrac{(x+4)(x-2)}{x+2} - 5 + 1 - \dfrac{3x+4}{x^2-14} = 0$, или $\dfrac{x^2-3x-18}{x+2} + \dfrac{x^2-3x-18}{x^2-14} = 0$. Далее вынести общий множитель за скобки, и т. д.

4. *Указание.* $2(x^3 + y^3) = (x^3 - x^2y + xy^2 + y^3) + (x^3 + x^2y - xy^2 + y^3)$, а сумма $a^5 + b^5$ делится на $a + b$, где $a = x^3 - x^2y + xy^2 + y^3$, $b = x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$.

5. *Решение.* Пусть $\log_7 \pi = \alpha$, тогда $\pi = 7^\alpha$. (1)
Аналогично $\log_5 \pi = \beta$, тогда $\pi = 5\beta$. (2)
Из (1) и (2) $\Rightarrow \pi^{1/\alpha} = 7$; $\pi^{1/\beta} = 5$, или $\pi^{1/\alpha} \cdot \pi^{1/\beta} = 35$, или $\pi^{1/\alpha + 1/\beta} = 35 > \pi^3$, или $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} > 3$.

Так как $\alpha = \log_7 \pi$ и $\beta = \log_5 \pi$, то получим
$\dfrac{1}{\log_7 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 3$, ч. т. д.

6. *Решение.* Пусть $\vec{a}\,(3^x; 3^y; 3^z)$ и $\vec{b}\,(1; 1; 1)$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^x \cdot 1 + 3^y \cdot 1 + 3^z \cdot 1 = 9$; $|\vec{a}| = \sqrt{(3^x)^2 + (3^y)^2 + (3^z)^2} = \sqrt{9^x + 9^y + 9^z} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$; $|\vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 9$.

Имеем $\dfrac{3^x}{1} = \dfrac{3^y}{1} = \dfrac{3^z}{1}$, откуда $3^x = 3^y = 3^z$, т. е. $x = y = z$. Учитывая I уравнение исходной системы, имеем $3^x + 3^y + 3^z = 9$; $3^x = 3$, $x = 1$, тогда $y = 1$, $z = 1$.

Ответ: (1; 1; 1).

7. *Ответ:* $7xy\,(x + y)\,(x^2 + xy + y^2)^2$.

8. *Ответ:* $\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b - a}}$, где $a < 3b$.

9. *Решение.* Известно, что если даны векторы $\vec{x} = (x_1; y_1)$ и $\vec{y} = (x_2; y_2)$, то $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1x_2 + y_1y_2$ и $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{y}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Так как $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos\gamma$, где $\cos\gamma = 1$, то $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \le |\vec{x}|\,|\vec{y}|$.

Следовательно, $x_1x_2 + y_1y_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Аналогично для трехмерного пространства
$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. (1)

Пусть $\vec{x}(\sqrt{2a+1};\ \sqrt{2b+1};\ \sqrt{2c+1})$, $\vec{y} = (1; 1; 1)$.

Согласно (1) имеем $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le$ $\le \sqrt{2a+1+2b+1+2c+1} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2(a+b+c)+3} \cdot \sqrt{3} =$ $= \sqrt{2\cdot 12+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{81} = 9.$

Итак, $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le 9$, ч. т. д.

10. *Ответ:* $\frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2)$.

11. *Решение.* $7^{n+2} + 8^{2n+1} = (7^{n+2} + 7^n \cdot 8) + (8^{2n+1} -$ $- 7^n \cdot 8) = 7^n(7^2 + 8) + 8((8^2)^n - 7^n) = 57 \cdot 7^n +$ $+ 8(64^n - 7^n)$. Поскольку $64^n - 7^n$ кратно разности $64 - 7 = 57$, то и данное выражение кратно 57.

12. *Решение.* После возведения в n-ю степень и приведения подобных членов, получим

$$(\sqrt{2} - 1)^n = A\sqrt{2} - B,$$

где A и B — целые числа.

Далее доказать, что $(\sqrt{2} + 1)^n = A\sqrt{2} + B$.

Перемножив полученные равенства, имеем

$1 = (\sqrt{2} - 1)^n \cdot (\sqrt{2} + 1)^n = 2A^2 - B^2$, или

$B = \sqrt{2A^2 - 1}$, а это и дает требуемое представление $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{2A^2} - \sqrt{2A^2 - 1}$, ч. т. д.

13. *Ответ:* 1.

14. *Решение.* Простое число может иметь следующий вид: $p = 3$, $p = 3k + 1$, $p = 3k + 2$. Если $p = 3$, то $p + 10 = 13$ и $p + 14 = 17$ удовлетворяют условию задачи.

Если $p = 3k + 1$, то $p + 10 = 3k + 11$ и $p + 14 =$ $= 3k + 15$ — число составное.

Если $p = 3k + 2$, то $p + 10 = 3k + 12$ — число составное, значит, $p = 3$.

Ответ: $p = 3$.

15. *Решение.* $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}\cdot 8(2+\sqrt{5})} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1+3\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Ответ: $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

16. *Ответ:* $x_1 = 0$, $x_2 = 240/289$.

Указание. Умножить обе части уравнения на $\sqrt{1+x}+1$.

17. *Решение.* Поскольку $2x^2 + 2y^2 = (x^2 - xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)$, то сумма седьмых степеней делится на сумму первых степеней.

18. *Указание.* Предварительно преобразовать второе уравнение системы. В результате получится система $x - y = 26$, $(x - y)(x + y) = 20$, и т. д.

19. *Ответ:* $(\pm 3; \pm 2)$.

Указание. Возвести I уравнение в квадрат, из II уравнения $x^2 + y^2 = \frac{78}{xy}$. Далее возвести в квадрат и вычесть I уравнение.

20. *Решение.* Пусть $x = \frac{\pi}{2} - y$, тогда

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ и

$= \sin 13x = \sin\left(13\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = \sin\left(6\pi + \frac{\pi}{2} - 13y\right) =$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 13y\right) = \cos 13y = f(\cos y) = f(\sin x)$.

Заметим, что число 13 можно заменить любым целым числом вида $4n + 1$.

21. *Решение.* Рассмотрим вектор $\vec{u}(x, y)$ и $\vec{v}\left(\sqrt{y^2-1};\ \sqrt{x^2-1}\right)$. Тогда $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2} = 3$ и I уравнение системы примет вид

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|. \qquad (1)$$

Равенство (1) означает, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны, тогда $x\sqrt{x^2-1} = y\sqrt{y^2-1}$. (2)

Заметим, что функция $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ возрастающая на $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$, тогда из (2) имеем $x = y$.

В этом случае II уравнение исходной системы с учетом области определения уравнения примет вид $x = y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Нетрудно проверить, что пара $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ является единственным решением системы.

Ответ: $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

22. *Ответ:* $(-1; 3)$, $(3; -1)$.

23. *Решение.* Если a, b, c — стороны треугольника, то $a + b > c$ (по неравенству треугольника), и т. д. Следовательно, $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 > a + b > c = (\sqrt[3]{c})^3$, откуда $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} > \sqrt[3]{c}$. Аналогично рассматриваются остальные случаи проверки неравенства треугольника. Значит, отрезки с длинами $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{c}$ также образуют треугольник.

24. *Ответ:* $x \in (1; +\infty)$. Исследовать функцию $f(x) = 3x^7 - x^4 + x - 3$ с помощью производной.

25. *Указание.* $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < \dfrac{1+2+\ldots+n}{n} = \dfrac{n(n+1)}{2n}$, и т. д.

26. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 1$.

27. *Указание.* $\arccos\left(\log_2 \dfrac{x}{3}\right) < \dfrac{\pi}{3}$, откуда $3\sqrt{2} < x \le 6$.

28. *Ответ:* $x = \dfrac{\lg 2}{\lg 3}$.

Указание. Прибавить и вычесть x^2, тогда $(\sqrt[x]{2} + x)^2 = (x + 3)^2$, и т. д.

29. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. Записать уравнение в виде $(3^x)^3 - (2^x)^3 = 3 \cdot (2^x \cdot (3^x)^2 - 3^x \cdot (2^x)^2)$.

Далее замена $2^x = a$, $3^x = b$, и т. д.

30. *Решение.* Пусть в роще всего x деревьев. Опишем вокруг каждого дерева круг радиуса 6 м. Согласно условию, эти круги не пересекаются и расположены в круге радиуса $258 + 6 = 264$ м. Следовательно, площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Имеем неравенство $\pi \cdot 264^2 \ge \pi \cdot 6^2 \cdot x$, или $x \le 44^2 = 1936 < 2013$, ч. т. д.

31. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Указание. Прологарифмировать обе части уравнения, например, по основанию 10.

32. *Указание.* Достаточно показать, что данное выражение делится одновременно на 7 и 9. Далее рассмотреть 2 случая: 1) $n = 2k$; 2) $n = 2k + 1$.

33. *Решение.* Пусть $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, тогда $x^2 + y^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. В этом случае I уравнение системы примет вид $\sin^4 3\alpha + \cos^4 3\alpha = 1$, или $(\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha)^2 - 2\sin^2 3\alpha\cos^2 3\alpha = 1$, или $\sin^2 3\alpha = 0$, или $\cos^2 3\alpha = 0$, т. е. $\sin 3\alpha = 0$, или $\cos 3\alpha = 0$.

1. Если $\sin 3\alpha = 0$, то $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 0$, или $\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = 0$, $\sin\alpha = 0$, или $3 - 4\sin^2\alpha = 0$, $\sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

а) если $\sin\alpha = 0$, то $x = 0$, $y = \pm 1$;

б) если $\sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \pm\dfrac{1}{2}$, т. е. имеем 6 пар решений.

2. Поскольку исходная система является симметрической, то существует еще 6 пар решений, так что имеем всего 12 пар решений.

Ответ: $(\pm 1; 0)$, $\left(\pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\pm\dfrac{1}{2}; \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0; \pm 1)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \mp\dfrac{1}{2}\right)$.

34. *Ответ:* (4; 2), (9; −3), (1; 1).

35. *Решение.* Так как $|\sin x| \le 1$, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin x = 1,\\ \sin^7 x = 1,\\ -\sin 7x = 1.\end{cases}$

Из I уравнения имеем $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Полученное решение удовлетворяет II и III уравнениям системы, так как $\sin^7 x = (\sin x)^7 =$

$$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)^7 = \cos^7 2\pi n = 1,$$

$$-\sin 7x = -\sin\left(\frac{7\pi}{2}+14\pi n\right) = \cos 14\pi n = 1.$$

Итак, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

36. *Решение.* Пусть $f(x) = x^3 + 2x + 10$. Заметим, что данное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$. Так как $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ при всех $x \in R$, то функция $f(x)$ является возрастающей на всей числовой прямой. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. уравнению

$x^3 + 2x + 10 = x$, или $x^3 + x + 10 = 0$,

$(x^3 + 8) + (x + 2) = 0;$

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (x + 2) = 0,$

$(x + 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$, откуда $x = -2$.

Уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$).

Ответ: $x = -2$.

37. *Указание.* Выразить левую часть равенства через первый член b_1 и знаменатель прогрессии q, и т. д.

38. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$x - 13 = (13 + x^2)^2$, откуда $\sqrt{x-13} = 13 + x^2$. (1)

Пусть $f(x) = 13 + x^2$, тогда $x = \sqrt{f-13}$,

т. е. $g(x) = \sqrt{x-13}$, или $g(x) = f(x)$, тогда $f(x) = x$, т. е. $13 + x^2 = x$ или $x^2 - x + 13 = 0$.

Полученное уравнение, а значит, и исходное, корней (действительных) не имеет, так как $D < 0$.

Замечание. Уравнение $x - 13 = (13 + x^2)^2$ можно решить иначе. Так как $13 + x^2 > 0$ при всех $x \in R$, то $x > 13$. Но при $x > 13$, $(13 + x^2)^2 > x - 13$, так что равенство $x - 13 = (13 + x^2)^2$ не может выполняться ни при каких x, т. е. исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

39. *Решение.* Пусть $f(x) = 6\ \mathrm{tg}^3\, x - 5$, тогда $\mathrm{tg}\, x = \sqrt[3]{\frac{1}{6}(\mathrm{tg}\, x+5)}$, т. е. $g(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{6}(f(x)+5)}$ — обратная функция (правая часть исходного уравнения). Тогда $g(x) = f(x)$, где $f(x)$ — монотонно возрастающая на области определения. Значит, $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = x$, или $6\ \mathrm{tg}^3\, x - 5 = \mathrm{tg}\, x$,

$$6\ \mathrm{tg}^3\, x - \mathrm{tg}\, x - 5 = 0. \qquad (1)$$

Пусть $\mathrm{tg}\, x = y$, тогда (1) примет вид

$$6y^3 - y - 5 = 0.$$

Очевидно, что $y = 1$ — корень полученного уравнения, тогда

$$6y\,(y^2 - 1) + 5\,(y - 1) = 0,$$
$$(y - 1)\,(6y^2 + 6y + 5) = 0,$$

откуда $y = 1$ — единственный корень, так как уравнение $6y^2 + 6y + 5 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$).

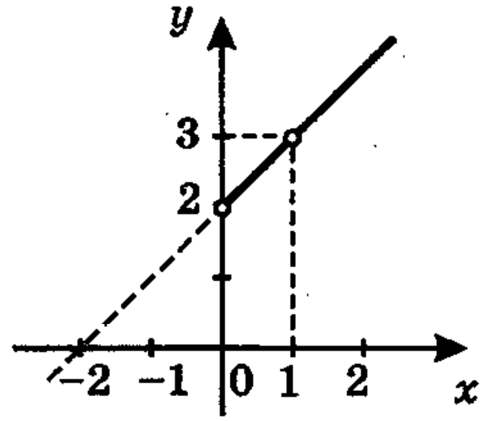
Если $y = 1$, то $\mathrm{tg}\, x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

40. *Ответ:* $x = 0$.

Указание. $x = 1$ не является корнем. Далее умножить обе части уравнения на $(x^2 - 1) \neq 0$. В результате получим $(x^3 - 1)\,(x^{13} - 1) = (x^8 - 1)^2$, и т. д.

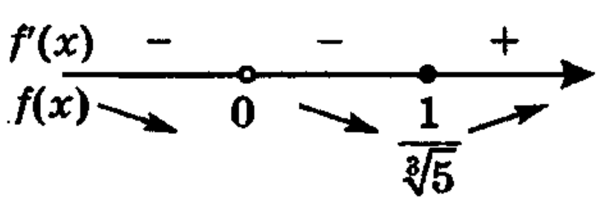
41. *Решение.* $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$



Тогда $y = 1 \cdot \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$, или

$y = x + 2$ (см. рис.).

42. *Решение.* Заметим, что корнями уравнения $5x^2 + \dfrac{2}{x} = 3\sqrt[3]{5}$ являются абсциссы точек пересечения или касания графика функции $f(x) = 5x^2 + \dfrac{2}{x}$ и прямой $y = 3\sqrt[3]{5}$. Найдем промежутки монотонности функции $y = f(x)$ и точки ее экстремумов. $f'(x) = 10x - \dfrac{2}{x^2}$, $f'(x) = 0$, или $\dfrac{2(5x^3-1)}{x^2} = 0$, откуда $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $x \neq 0$.



Итак, $f'(x) > 0$ при $x \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Следовательно, функция $y = f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right]$ и возрастает на $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ — точка минимума функции, тогда $y_{min} = y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{25}} + 2\sqrt[3]{5} = \frac{15}{\sqrt[3]{25}} = $

$= \frac{15\sqrt[3]{5}}{5} = 3\sqrt[3]{5}$.

Таким образом, число $3\sqrt[3]{5}$ является корнем уравнения $5x^2 + \frac{2}{x} = 3\sqrt[3]{5}$, и при $x > 0$ неравенство выполняется лишь в точке минимума. Поскольку функция $f(x) = 5x^2 + \frac{2}{x}$ непрерывна и убывает на $(-\infty; 0)$, то если мы найдем точку $x_0 \in (-\infty; 0)$, такую, что $f(x_0) = 3\sqrt[3]{5}$, то решением исходного неравенства будет интервал $[x_0; 0)$. Значит, если точка x_0 существует, то она является корнем уравнения $5x^2 + \frac{2}{x} = 3\sqrt[3]{5}$ и равносильного ему уравнения $5x^3 - 3\sqrt[3]{5}x + 2 = 0$.

Разделив многочлен $5x^3 - 3\sqrt[3]{5}x + 2$ на двучлен $\sqrt[3]{5}x - 1$, получим

$5x^3 - 3\sqrt[3]{5}x + 2 = (\sqrt[3]{5}x - 1)(5x^2 + \sqrt[3]{25}x - 2\sqrt[3]{5}) = 0.$

Так как $5x^2 + \sqrt[3]{25}x - 2\sqrt[3]{5} = (\sqrt[3]{5}x - 1)(\sqrt[3]{25}x + 2\sqrt[3]{5})$, то $x_0 = -\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$. Следовательно, решением исходного неравенства являются все числа из промежутка $\left[-\frac{2}{\sqrt[3]{5}}; 0\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{\sqrt[3]{5}}; 0\right) \cup \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right\}$.

43. *Решение.* Поскольку $27 = xy + yz + xz \geq \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$, $xyz = x + y + z + 18 \geq 4\sqrt[4]{18xyz}$, то из первого неравенства имеем $xyz \leq 27$, а из второго, с учетом того, что $xyz \geq 0$ (по условию), получим $xyz \geq 27$. Значит, $xyz = 27$, откуда $x = y = z = 3$ (из неравенства между средними).

Ответ: (3; 3; 3).

44. *Ответ:* $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \geq 2$.

Указание. $x - 2 + 2\sqrt{x-3} = (x-3) + 2\sqrt{x-3} + 1$. После преобразований решить уравнение $\sin x = 1$, где $x \geq 3$.

45. *Ответ:* нет решений. Преобразовать неравенство к виду $2|x| - x \leq -0{,}5$. Далее рассмотреть два случая: 1) $x \geq 0$; 2) $x < 0$.

46. *Указание.* Предварительно доказать, что $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{a}{2}(3 - a^2)$, тогда $\sin^5 x + \cos^5 x = = (\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) - \sin^2 2x \cos^2 x \cdot \cdot (\sin x + \cos x)$, где $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}(a-1)^2$, и т. д.

47. *Ответ:* $[-2\sqrt{2}; 0) \cup (0; 2\sqrt{2}]$.

48. *Ответ:* [3; 5,25].

49. *Решение.* В силу того, что $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\cos\alpha| \le 1$, имеем неравенство

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) \le 6,$$

причем равенство выполняется, если

$$\sin(x-y)=1 \text{ и } \cos(2x-y)=1.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin(x-y)=1,\\ \cos(2x-y)=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ 2x-y=2\pi m,\end{cases} \quad n,\ m \in Z.$$

Решая полученную систему (например, вычитанием), находим

$$x=-\frac{\pi}{2}+2(m-n)\pi=2\pi k-\frac{\pi}{2},$$

$$y=(2(m-2n)-1)\pi=(2(k-n)-1)\pi+(2l+1)\pi.$$

50. *Решение.* Заменяя x на $\dfrac{1}{x}$, получим

$$5f\left(\frac{1}{x}\right)=3f(x)+\sqrt{x}, \text{ где } x>0.$$

Решая полученное уравнение с данным, имеем

$$\begin{cases}5f(x)-3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\\ 3f(x)-5f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\sqrt{x}.\end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения на 5, а второго на (−3), а затем почленно складывая, получим $16f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}$, $x>0$, откуда

$$f(x)=\frac{5+3x}{16\sqrt{x}}.$$

51. *Ответ:* $(2^{-1/\sqrt{3}};\ 2^{1/\sqrt{3}})$.

52. *Решение.* Пусть $y = x - 2$, тогда числа $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$ являются корнями многочлена $(y + 2)^3 - 9(y + 2)^2 + 3a(y + 2) + a = y^3 - 3y^2 + 3(a - 8)y + 7a - 28$.

Согласно теореме Виета для кубического уравнения, имеем

$y_1 + y_2 + y_3 = 3$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 3(a - 8)$,
$y_1y_2y_3 = 28 - 7a$.

Кроме того, $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$, но $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3y_1y_2y_3$, тогда получим $0 = 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot (a - 8) \cdot 3 + 3 \cdot (28 - 7a)$, откуда находим $a = \frac{109}{16}$.

Ответ: $a = \frac{109}{16}$.

53. *Решение.* $7\sin\beta = 6\sin\beta + \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$,
или $6\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) - \sin\beta = 2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$. (1)
С другой стороны, $7\sin\beta = 8\sin\beta - \sin\beta$,
или $8\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta) + \sin\beta = 2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha$. (2)
Разделив обе части (2) на (1), получим

$$\frac{8\sin\beta}{6\sin\beta} = \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)},$$ или

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, откуда $3\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4\operatorname{tg}\alpha$, ч. т. д.

54. *Ответ:* $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9 + 4n^2}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Указание. После упрощения получим

$\cos(\pi\sqrt{x^2-4x-5}) = 1$, или $\begin{cases} x^2-4x-5\geq 0, \\ \pi\sqrt{x^2-4x-5}=2\pi n, \end{cases}$

$n = 0, 1, \ldots$, и т. д.

55. *Решение.* ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 6{,}5, \\ x\neq 4, \end{cases}$ т. е. $x \in [6{,}5; +\infty)$.

Запишем уравнение в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + x - 6{,}5 +$

$+ 13{,}5 = \frac{(x-2)^2}{x-4} + x$, или $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + 7 = \frac{(x-2)^2}{x-4}$. (1)

Заметим, что $x = 6$ — корень уравнения (1). Докажем, что других корней уравнение (1) не имеет. Так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} + 7$ убывает. Для функции $y = \frac{(x-2)^2}{x-4}$ найдем производную:

$$y' = \frac{2(x-2)(x-4)-(x-2)^2\cdot 1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{(x-2)(2x-8-x+2)}{(x-4)^2} = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}.$$

Если $x \geq 6{,}5$, то $y' > 0$, значит, функция $y = \frac{(x-2)^2}{x-4}$ возрастает на $[6{,}5; +\infty)$. Следовательно, $x = 6$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 6$.

56. *Решение.* Рассмотрим функцию

$$y = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Заметим, что при $x > 0$ функция возрастает, так как при $x > 0$

$$y' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

а при $x = 0$, $y' = 0$.

Значит, при $x > 0$ выполняется неравенство $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0$. Полагая $x = \frac{1}{2012}$, получим

$$\ln\frac{2013}{2012} - \frac{1/2012}{2010/2012} > 0, \text{ или } \ln\frac{2013}{2012} > \frac{1}{2013},$$

т. е. I число меньше II.

57. *Ответ:* нет корней.

Указание. $\arcsin x + \arccos = \frac{\pi}{2}$.

58. *Решение.* ОДЗ. $4 - x^2 \geq 0$, $x^2 \leq 4$, $|x| \leq 2$.

Заметим, что левая и правая части уравнения — четные функции, так как

$$(-x)^2\sqrt{4-(-x)^2} = x^2\sqrt{4-x^2} \text{ и}$$

$$|-x|^3 - 4|-x| + 4\sqrt{2} = |x|^3 - 4|x| + 4\sqrt{2}.$$

Следовательно, для нахождения корней исходного уравнения (если они существуют) достаточно ограничиться нахождением положительных корней, а затем указать в ответе противоположные им значения. Тогда существует, причем единственное, число $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $x = 2\sin t$, при котором данное уравнение примет вид

$4\sin^2 t \cdot 2\cos t = 8\sin^3 t - 8\sin t + 4\sqrt{2}$, или

$\sin^2 t\cos t - \sin^3 t + \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, или

$\sqrt{2}\sin t(\sin t\cos t + \cos^2 t) = 1$, или

$2\sin t\cos t\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) = 1$, или

$\sin 2t \sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $\sin 2t > 0$ и

$\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ (так как $t \in [0; \pi/4]$), тогда

$\left[\begin{array}{l}\sin 2t = 1,\\ \sin(t + \pi/4) = 1,\end{array}\right.$ откуда $t = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

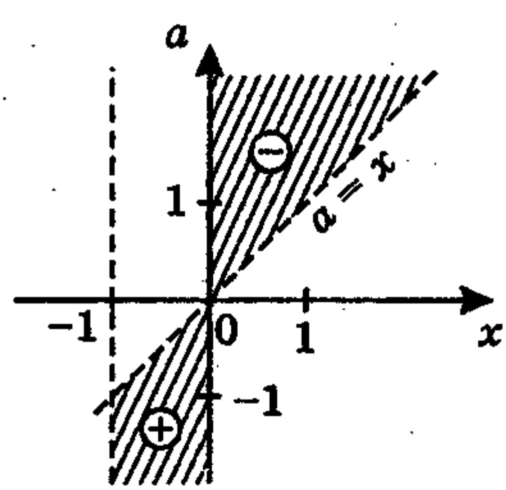
Следовательно, как указывалось ранее,

$x = -\sqrt{2}$ — также корень исходного уравнения.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

59. *Ответ:* $\dfrac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

60. *Решение.* Заметим, что $4x^2 - x + \sqrt{7} > 0$ при всех $x \in R$ (так как $D < 0$ и первый коэффициент $4 > 0$). Тогда данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0$.



Для решения полученного неравенства на координатной плоскости $(x; a)$ найдем области, где выражение, стоящее в левой части неравенства, сохраняет знак, и определим его. Границы этих областей задаются соотношениями $x + 1 > 0$, $x + 1 = 1$, т. е. $x = 0$ и $a = x$. На рисунке заштрихованы те области, координаты точек которых удовлетворяют неравенству.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1]$, $x \in (-1; 0)$;
при $a \in (-1; 0)$, $x \in (a; 0)$;
при $a = 0$ решений нет;
при $a \in (0; +\infty)$, $x \in (0; a)$.

61. *Решение.* ОДЗ: $\left[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Заменой $x = \sin\alpha$, где $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, уравнение приводится к виду $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Но $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha$ и $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = |\cos\alpha|$.

Так как $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$, тогда

$\sin 3\alpha = \cos\alpha$, или $\sin 3\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0$;

$2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 0$,

или $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 0$.

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 0$, $\frac{\pi}{4} - 2\alpha = \pi n$, откуда

$\alpha = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Тогда $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2} \le \frac{\pi}{2}$.

Решая полученное неравенство, находим
$-\frac{3}{4} \le n \le \frac{5}{4}$, т. е. $n = 0; 1$.

Если $n = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{8}$; если $n = 1$, $\alpha = -\frac{3\pi}{8}$.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = 0$, откуда $\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

т. е. $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Следовательно, $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + \pi n \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{4} \le n \le \frac{1}{4}$,

$n = 0$, тогда $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

а) $\alpha = \frac{\pi}{8}$, $x = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

б) $\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $x = \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) =$

$= -\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

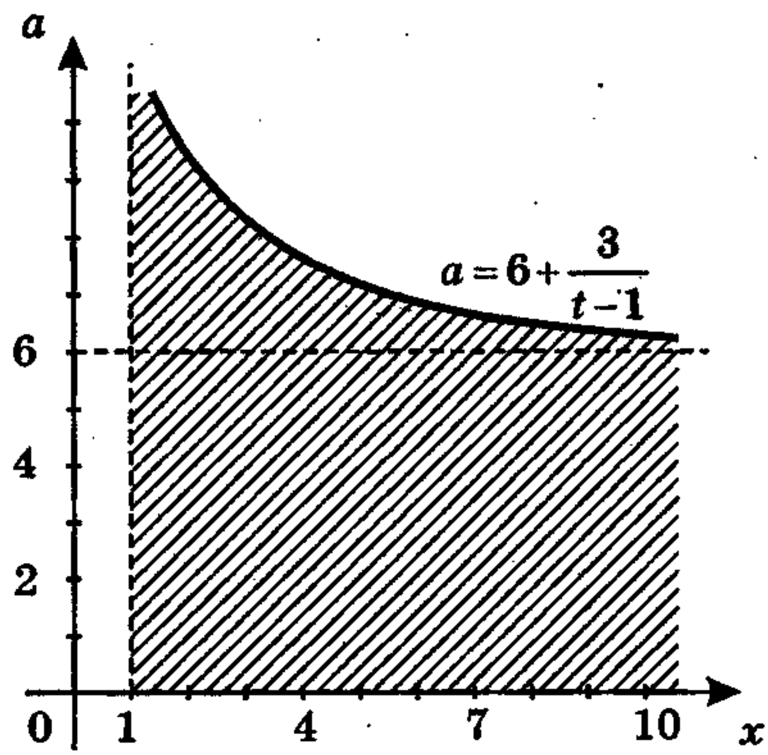
62. *Решение.* Согласно условию, искомое число имеет вид $\overline{2abcde}$, тогда имеем $\overline{abcde2} = 3 \cdot \overline{2abcde}$, или $\overline{abcde} \cdot 10 + 2 = 3 \cdot (2 \cdot 10^5 + \overline{abcde})$.

Пусть $\overline{abcde} = X$ — пятизначное число, тогда $10X + 2 = 3 \cdot (2 \cdot 10^5 + X)$, или $7X = 6 \cdot 10^5 - 2$,

$X = 85\,714$, тогда исходное число будет равно $\overline{2abcde} = \overline{2X} = 285\,714$.

Ответ: 285 714.

63. *Решение.* Пусть $2^{\sqrt{x-4}} = t$, где $t \geq 1$, тогда получим неравенство $(a - b)t < a - 3$.



На координатной плоскости $(t;\, a)$ изобразим области, координаты точек которых удовлетворяют соотношению $t = 1$ и $(a - 6)t = a - 3$, откуда $a = \dfrac{3(2t-1)}{t-1} = 6 + \dfrac{3}{t-1}$. На рисунке нужная область заштрихована. Следовательно, при $a \in (-\infty;\, 6]$ $t \in [1;\, +\infty)$; при $a \in (6;\, +\infty)$ $t \in \left[1; \dfrac{a-3}{a-6}\right)$,

Учитывая замену, получим ответ.

Ответ: при $a \in (-\infty;\, 6)$, $x \in [4;\, +\infty)$;

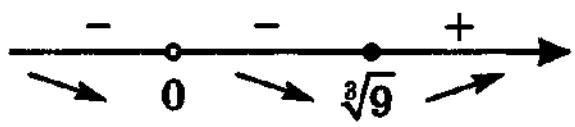
при $a \in (6;\, +\infty)$, $x \in \left[4; 4+\log_2^2\left(\dfrac{a-3}{a-6}\right)\right)$.

64. *Решение.* Пусть $f(x) = x^2 + \dfrac{18}{x}$.

Найдем с помощью производной наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ (если они существуют).

$f'(x) = 2x - \dfrac{18}{x}$, $f'(x) = 0$, $x \neq 0$, или $2x^3 - 18 = 0$,

$x = \sqrt[3]{9}$.



Следовательно, $x = \sqrt[3]{9}$ — точка минимума, тогда $f_{min} = f(\sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{9^2} + \dfrac{18}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{27}{\sqrt[3]{9}} = 9\sqrt[3]{3}$.

Итак, $x_0 = \sqrt[3]{9}$ — один из корней исходного уравнения. Записав его в виде $x^3 - 9\sqrt[3]{3}\,x + 18 = 0$, разложим левую часть на множители по степеням $(x - \sqrt[3]{9})$ (например, делением «уголком»).

Имеем $(x - \sqrt[3]{9})(x^2 + \sqrt[3]{9}\,x - 6\sqrt[3]{3}) = 0$, откуда $x_1 = \sqrt[3]{9}$, $x^2 + \sqrt[3]{9}\,x - 6\sqrt[3]{3} = 0$, $D = 27\sqrt[3]{3} > 0$,

$x_{2,3} = \dfrac{-\sqrt[3]{9} \pm \sqrt{27\sqrt[3]{3}}}{2} = \dfrac{-\sqrt[3]{9} \pm 3\sqrt[3]{9}}{2}$, $x_2 = \sqrt[3]{9}$, $x_3 = -2\sqrt[3]{9}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет 3 корня, из которых x_1 и x_2 совпадают.

Ответ: $\sqrt[3]{9}$, $-2\sqrt[3]{9}$.

65. *Ответ:* нет решений.

66. *Решение.* Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ взаимно обратные. В силу симметрии их графиков относительно прямой $y = x$ следует, что в случае

9. Зак. 463

касания оба графика либо касаются прямой $y = x$, либо перпендикулярны ей.

Следовательно, в точке касания имеем

$y' = a^x \ln a = \pm 1$, $x = a^x$, откуда $a = e^{\frac{1}{e}}$ $(x = e)$ для знака «+» и a^{-e} $(x = e^{-1})$ для знака «–». Таким образом, график $y = a^x$ касается графика $y = \log_a x$ при $a = e^{1/e}$, $a = e^{-e}$.

67. *Решение.* $4 + 4\cos\dfrac{x-y}{2} + (1 + \cos(x-y)) =$

$$= 4\sqrt{4x - x^2}\cdot\frac{1+\cos\dfrac{x-y}{2}}{2},$$

$$4 + 4\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos^2\frac{x-y}{2} =$$

$$= 2\sqrt{4x-x^2}\left(1+\cos\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos^2\frac{x-y}{2} + (2 - \sqrt{4x-x^2}\cos\frac{x-y}{2} + (2 - \sqrt{4x-x^2}) = 0.$$

Полученное уравнение решаем как квадратное относительно $\cos\dfrac{x-y}{2}$.

$D = (2 - \sqrt{4x-x^2})^2 - 4(2 - \sqrt{4x-x^2}) =$
$= -(2-x)^2 \le 0$, откуда $x = 2$, тогда

$\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{4x-x^2}-2}{2}$, или $\cos\dfrac{2-y}{2} = 0$, или

$\cos\dfrac{y-2}{2} = 0$, откуда $y = \pi + 2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $(2; \pi + 2 + 2\pi n)$, $n \in Z$.

68. *Решение.* Данное выражение приведем к основанию 2:

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 6}\cdot\frac{\log_2 6}{\log_2 7}\cdot\frac{\log_2 7}{\log_2 8}=$$

$$=\frac{\log_2 2}{\log_2 8}=\frac{1}{3}.$$

Замечание. Известно, что $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$. (1)

Если поставить в соответствие логарифму $\log_a b$ дробь $\frac{b}{a}$ и то же сделать для других логарифмов, то равенству (1) можно поставить в соответствие равенство $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, которое означает обычное сокращение на a. Рассматривая наш пример, имеем после сокращения дробь $\frac{2}{8}$, которой соответствует $\log_2 8=\frac{1}{3}$ (см. *Шарыгин И.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1997. С. 139–140).

69. *Ответ:* $b=a$.

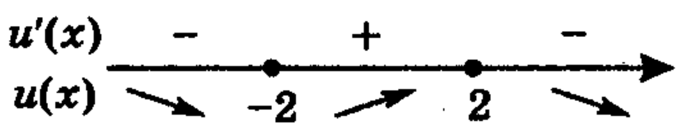
Указание. Учесть, что $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, и т. д.

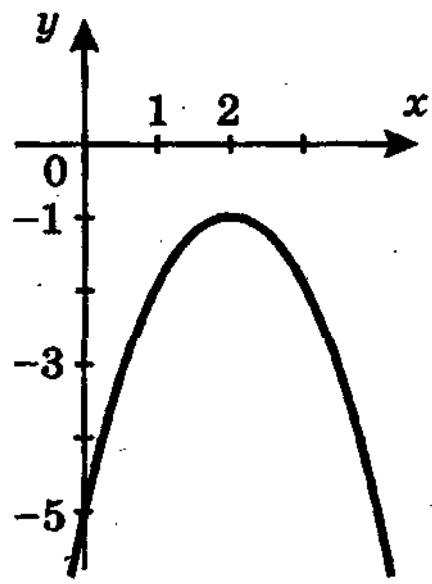
70. *Решение.* Запишем I уравнение в виде $y^2=\frac{4x}{x^2+4}$. Пусть $y^2=u$, где $u\ge 0$, тогда $u(x)=\frac{4x}{x^2+4}$.

Найдем множество значений функции $u(x)$:

$u'(x)=\frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$; $u'(x)=0$, или

$\frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}=0$, откуда $x_{1,2}=\pm 2$.





Следовательно, $x_1 = -2$ — точка минимума функции $u(x)$, тогда $u_{min} = u(-2) = \frac{4\cdot(-2)}{4+4} = -1$.

Аналогично $x_2 = 2$ — точка максимума и $u_{max} = u(2) = 1$.

Значит, $E(u) = [0; 1]$.

Так как $u = y^2$, то $0 \le y^2 \le 1$, т. е. $y \in [-1; 1]$.

Запишем II уравнение системы в виде $y^3 = -x^2 + 4x - 5$.

Пусть $y^3 = v$, тогда $v(x) = -x^2 + 4x - 5$, где $E(v) = (-\infty; v_0)$, где v_0 — ордината вершины параболы.

Найдем абсциссу вершины параболы $x_0 = -b/2a = 2$, тогда $v_0 = -4 + 8 - 5 = -1$, т. е. $E(v) = (-\infty; -1]$.

Значит, $v \le -1$, $y^3 \le -1$, $y \le -1$. Исходная система имеет решение при $y = -1$, тогда $x = 2$.

Ответ: (2; −1).

71. *Ответ:* $x = 3$.

Указание. Преобразовать уравнение к виду $2 \cdot 5^x = 125 \cdot 8^{\frac{1}{x}}$, а затем прологарифмировать обе части по основанию 5 (или 8), и т. д.

72. *Ответ:* $x = 1$.

Указание. Учесть, что $a + \frac{1}{a} \ge 2$, и т. д.

73. ***Решение.*** Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения. Так как $8x^4 - 8x^2 + 1 = -1 + 2(1 - 4x^2 + 4x^4) = -1 + 2(1 - 2x^2)^2$, то уравнение примет вид

$$4(1 - 2x^2)\,(2(1 - 2x^2)^2 - 1) = -1. \qquad (1)$$

Пусть $x = \cos t$, где $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $1 - 2x^2 = 1 - 2\cos^2 t = \cos 2t$ и уравнение (1) преобразуется к виду $4\cos 2t\,(2\cos^2 2t - 1) = -1$.

Но $2\cos^2 2t - 1 = \cos 4t$, тогда получим

$$4\cos 2t \cos 4t = -1. \qquad (2)$$

Так как $t \neq 0$, то $\sin 2t \neq 0$, тогда умножив и разделив левую часть уравнения (2) на $\sin 2t \neq 0$, имеем $\frac{2(2\cos 2t \sin 2t)\cos 4t}{\sin 2t} = -1$, или

$\frac{2\sin 4t \cos 4t}{\sin 2t} = -1$, или $\frac{\sin 8t}{\sin 2t} = -1$.

Значит, $\sin 8t + \sin 2t = 0$, тогда $2\sin 5t \cos 3t = 0$, откуда находим $t_1 = \frac{\pi n}{5}$. $t_2 = \frac{\pi + 2\pi n}{6}$, $n \in Z$.

Так как $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то из первой серии находим $t = \frac{\pi}{5}$ (при $n = 1$) и $t = \frac{2\pi}{5}$ (при $n = 2$), а из второй при $n = 0$ имеем $t = \frac{\pi}{6}$.

Учитывая, что $x = \cos t$, получим ответ.

Ответ: $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

74. *Ответ:* $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$,

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Указание. Учесть, что $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ и $\sin 54^\circ = \sin(3 \cdot 18^\circ) = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$, $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$. Тогда получим уравнение $4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0$, и т. д.

75. *Решение.* Заметим, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Тогда, разделив обе части первого уравнения на $x^2y^2z^2 \neq 0$, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{9}{z^2}=25, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=16, & (2)\\ 13\sqrt{5}x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y+2\sqrt{3}z=24. & (3) \end{cases}$$

Введем векторы $\vec{u}\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}, \frac{3}{z}\right)$, $\vec{v}(x, 2y, 5z)$.

Тогда $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{x} \cdot x + \frac{2}{y} \cdot 2y + \frac{3}{z} \cdot 5z = 1 + 4 + 15 = 20$.

Из (1) и (2) следует, что $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 4$.

Следовательно, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Значит, эти векторы коллинеарны, т. е. $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{3}{5z^2}$, откуда $y^2 = x^2$ и $z^2 = \frac{3}{5}x^2$.

Тогда уравнение (2) примет вид

$x^2 + 4x^2 + 25 \cdot \frac{3}{5}x^2 = 16$, или $20x^2 = 16$,

откуда $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $z = \pm\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Всего получим 8 троек чисел, которые являются решениями уравнений (1) и (2). Проверкой можно убедиться, что лишь тройка чисел $(2/\sqrt{5}$, $-2/\sqrt{5}$, $-2\sqrt{3}/5)$ удовлетворяет уравнению (3), а значит, является решением исходной системы.

Ответ: $(2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, -2\sqrt{3}/5)$.

76. Решение.

I способ

Запишем III уравнение в виде $z = 1 - 2(x-3)^2$. (1)

Из I уравнения имеем $x - 3 = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$. (2)

Тогда уравнение (1) примет вид

$$z = 1 - \frac{2y^2}{1+y^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2}. \quad (3)$$

Теперь упростим II уравнение, учитывая (3):

$$y^2 = \left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)^2 - 1, \text{ или } y^2 = \left(\frac{1+y^2}{1-y^2} - 1\right)\left(\frac{1+y^2}{1-y^2} + 1\right),$$

или $y^2 = \dfrac{4y^2}{(1-y^2)^2}$, откуда $y = 0$, или $\dfrac{4}{(1-y^2)^2} = 1$.

Если $y = 0$, то $x = 3$, $z = 1$; если $\dfrac{4}{(1-y^2)^2} = 1$, то $1 - y^2 = \pm 2$, откуда $y^2 = -1$ — нет корней, $y^2 = 3$, $y_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

а) $y_2 = -\sqrt{3}$, тогда $x_2 = 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{1}{2}$;

б) $y_3 = \sqrt{3}$, $x_3 = 3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $(3; 0; 1)$, $\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)$,

$$\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right).$$

II способ

Замена $z = \cos t$, где $t \in [0; \pi]$, и т. д.

77. *Решение.* Пусть $t = 0{,}5\,(\cos x - \sin x)$, или

$$t = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Итак, $E(t) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Заметим, что функция $y = \frac{10}{\pi}\arccos t$ убывающая и непрерывна, тогда

$$E(y) = \left[\frac{10}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{10}{\pi}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{5}{2}; \frac{15}{2}\right] = [2{,}5; 7{,}5].$$

Ответ: $E(y) = [2{,}5; 7{,}5]$.

78. *Указание.* Положить $7x - 11 = \sqrt[3]{x+y} = \sqrt[3]{x+9y} = k$. После преобразований решить уравнение $18k^5 - 74k^3 + 8k = 0$.

79. *Решение.* Пусть $f(x) = 3x^7 - x^4 + x - 3$, тогда $f'(x) = 21x^6 - 4x^3 + 1$. Поскольку $D/4 = -17 < 0$ и $a = 21 > 0$, то $f'(x) > 0$ при любом $x \in R$. Следовательно, функция f является возрастающей и непрерывной на всей числовой оси, т. е. ее график может пересекать ось Ox лишь в одной точке. Так как $f(1) = 3 \cdot 1^7 - 1^4 + 1 - 3 = 0$, то решениями исходного неравенства являются все числа из промежутка $x \in (1; +\infty)$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

80. *Решение.* Проведем апофему MK на грань MDC. Пусть $OK = x$, где $x > 0$ — необходимое условие, $OM = y$ — высота пирамиды, тогда $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot MO = \frac{4}{3} x^2 y$.

По условию $V_{\text{пир.}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, тогда $\frac{4}{3} x^2 y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, откуда $y = \frac{\sqrt{2}}{x^2}$.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h,$$

где $P_{\text{осн.}} = 8x$; $h = \sqrt{x^2 + y^2}$,

тогда $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 8x\sqrt{x^2 + y^2} = 4x\sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $y = \frac{\sqrt{2}}{x^2}$, то $S_{\text{бок.}} = S(x) = 4x\sqrt{x^2 + \frac{2}{x^4}}$ или $S(x) = 4\sqrt{x^4 + \frac{2}{x^2}}$.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^2}$ при $x > 0$. Найдем производную $f'(x) = \frac{4}{x^3}(x^6 - 1)$;

$f'(x) = 0$ при $x = 1$. Заметим, что при $0 < x < 1$ $f'(x) < 0$, при $x > 1$ $f'(x) > 0$.

Значит, функция f непрерывная в точке $x = 1$, убывает при $0 < x \le 1$ и возрастает при $x \ge 1$. Следовательно, функции f и $S_{бок.} = 4\sqrt{f(x)}$ при $x = 1$ будут иметь наименьшие значения.

При $x = 1$, $S_{бок.} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

81. *Указание.* Положить $x^2 = a$, $y^2 = b$.

82. *Ответ:* $\left(\frac{9}{4}; \frac{27}{8}\right)$.

83. *Ответ:* 0.

84. *Указание.* Возвести I уравнение в квадрат и подставить значение $x + y + z$.

Получим $\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5$.

II уравнение возвести в квадрат и вычесть III. После преобразований получится система

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz + yz = 9, \\ xyz = 4, \end{cases}$$

которую можно решить с использованием обобщенной формулы Виета.

85. *Ответ:* $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Указание. $x - 4 - \frac{x-6}{x-4} = \frac{(x-5)(x-2)}{x-4}$;

$$\frac{1}{3(x-5)} + \frac{2}{3(x-2)} = \frac{x-4}{(x-5)(x-2)}.$$

Получим уравнение

$$5\log_2\frac{(x-5)(x-2)}{x-4}=\log_{\sqrt{2}}\frac{x-4}{(x-5)(x-2)}+7,\text{ или}$$

после упрощений $\log_2\frac{(x-5)(x-2)}{x-4}=1$, и т. д.

86. *Ответ:* $x = 62\,193$.

Указание. Если x — искомое число, то получим систему уравнений $\begin{cases}x+307=m^2,\\ x-192=n^2,\end{cases}$ откуда $m^2-n^2=$ $=499$, и т. д.

87. *Решение.* Заметим, что $x^2-10x-22\ge 0$, так как произведение цифр неотрицательно. Следовательно, $x\ge 5+\sqrt{47}>11$. Можно доказать, что произведение цифр любого числа не больше самого числа.

Действительно, $x=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$, тогда

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\le a_1\cdot 9^{n-1}\le a_1\cdot 10^{n-1}+$$
$$+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_n=x.$$

Значит, $x^2-10x-22\le 0$, откуда находим $x\le\frac{1}{2}(11+\sqrt{209})<13$.

Итак, целое число x удовлетворяет неравенству $11<x<13$, откуда $x=12$.

Проверка. $144-120-22=1\cdot 2$.

Ответ: 12.

88. *Решение.* Пусть $\log_3 x=y$, тогда данное уравнение примет вид

$$y^2+(x-2)y+(2x-8)=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является квадратным относительно y.

$D = (x-2)^2 - 4(2x-8) = (x-6)^2$, тогда $y_1 = -2$, $y_2 = 4 - x$. Учитывая замену $\log_3 x = y$, получим совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = -2,\\ \log_3 x = 4 - x.\end{array}\right.$$

Из I уравнения совокупности находим $x = \dfrac{1}{9}$.

Нетрудно заметить, что $x = 3$ — корень второго уравнения совокупности. Других корней оно иметь не может, так как функция, стоящая в левой части уравнения, возрастает на ОДЗ переменной, а функция в правой части убывает. Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{9}$, $x_2 = 3$.

89. *Ответ:* решений нет.

90. *Ответ:* если $0 < a < 1$, то $a < x < \sqrt{a^2+1}$, если $a > 1$, то $x > \sqrt{a^2+1}$.

Указание. Преобразовать неравенство к виду $\log_a (x^2 - a^2) > 0$ и рассмотреть два случая.

91. *Решение.* Запишем уравнение в виде

$$\log_6 \frac{9x^2+1}{x} = 3x(2-3x), \text{ где } x > 0. \qquad (1)$$

Можно доказать (например, с помощью производной), что наименьшее значение функции $y_1 = \dfrac{9x^2+1}{x}$, или $y_1 = 9x + \dfrac{1}{x}$ достигается при $x = \dfrac{1}{3}$ и равно 6, тогда наименьшее значение

$$\log_6 \frac{9x^2+1}{x} = \log_6 6 = 1.$$

Аналогично в правой части уравнения наибольшее значение функции $y_2 = 3x(2 - 3x)$ достигается при $x = \frac{1}{3}$ и равно также 1. Следовательно, равенство (1) выполняется лишь при $x = \frac{1}{3}$. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

92. *Ответ:* $\frac{a+3}{2}$.

93. *Решение.* Заметим, что выражение

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1} + 10^n$$

есть сумма $(n + 1)$ членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1$, $q = 10$, $b_n = 10^n$, тогда

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{10^n \cdot 10 - 1}{10-1} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}.$$

Значит, данное число можно представить в виде

$$\frac{10^{n+1} - 1}{9}(10^{n+1} + 35) + 36, \text{ или}$$

$$\frac{1}{9}((10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 35) + 9 \cdot 36) =$$

$$= \frac{1}{9}((10^{2(n+1)} + 34 \cdot 10^{n+1} - 35 + 324) =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2(n+1)} + 34 \cdot 10^{n+1} + 17^2) = \left(\frac{10^{n+1} + 17}{3}\right)^2.$$

Но $10^{n+1} + 17$ кратно 3 (по признаку делимости), значит, искомое число есть точный квадрат, ч. т. д.

Литература

1. *Балаян Э.Н.* 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике. — 3-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2008.

2. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

3. *Балаян Э.Н.* 555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

4. *Бартенев Ф.А.* Нестандартные задачи по алгебре — М.: Просвещение, 1976.

5. *Дьюдени Г.Э.* 520 головоломок. — М.: Просвещение, 1983.

6. *Коваль С.* Математическая смесь. — Варшава, 1972.

7. *Лоповок Л.М.* 1000 проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.

8. *Мазаник А.А.* Реши сам. Ч. III. — Минск: Народная Асвета, 1972.

9. *Малаховский В.С.* Числа знакомые и незнакомые. — Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2005.

10. *Минаева С.С.* Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. — М.: Просвещение, 1983.

11. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.

12. *Тригг У.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975.

Содержание

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

800

ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

9–11 классы

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 25.05.2012. Подписано в печать 08.08.2012.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,8. Тираж 2500 экз.
Заказ № 463.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.
Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.