Алгебра

Методические рекомендации

7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

АЛГЕБРА

Методические рекомендации

7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Москва
«Просвещение»
2015

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
А45

Авторы: С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова

Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс: учебное пособие для общеобразоват. организаций / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова и др.]. — М. : Просвещение, 2015. — 000 с. : ил. — ISBN 978-5-09-035910-8.

Пособие предназначено учителям, ведущим преподавание по учебнику «Алгебра. 7 класс» Г. В. Дорофеева и др. Оно содержит методические комментарии к каждой главе учебника, рекомендации к решению упражнений, примерное распределение материала других пособий данного учебно-методического комплекта по изучаемым темам.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-035910-8

Введение

Цель данного пособия — помочь учителю в овладении идеологией и основными методическими идеями курса алгебры для 7—9 классов, реализуемого в линии учебников Г. В. Дорофеева и др., облегчить ежедневную подготовку к урокам при работе в 7 классе.

В разделе «Общая характеристика курса алгебры 7—9 классов» излагается концепция курса, описывается состав учебно-методического комплекта и функции каждого из входящих в него пособий, даётся характеристика содержания и методических особенностей комплекта, приводится перечень планируемых результатов обучения алгебре в 7—9 классах. Завершается этот раздел описанием содержания учебника для 7 класса.

Раздел «Примерное поурочное планирование учебного материала» послужит учителю основой для организации и распределения учебного времени в 7 классе.

Основной раздел пособия — это раздел «Рекомендации по организации учебного процесса», структура которого соответствует структуре учебника для 7 класса. К каждой главе учебника в этом разделе содержатся:

- примерное поурочное планирование учебного материала, представленное в виде таблицы, в которой указывается число часов, отводимое на изучение каждого пункта, и место зачётной (контрольной) работы;
- основные цели, характеризующие центральные установки по изучению материала;
- обзор главы, в котором кратко описывается её содержание;
- основные виды деятельности;
- комментарий к использованию электронных изданий.

По каждому пункту учебника предлагается:

- методический комментарий, содержащий советы и рекомендации по изложению материала, в том числе относящиеся к реализации дифференцированного подхода в обучении;
- комментарий к упражнениям, в котором содержатся рекомендации по работе с конкретными задачами, рассматриваются различные решения наиболее трудных задач.

Общая характеристика курса алгебры 7—9 классов

Краткая концепция курса

К общим идеям, составляющим основу концепции курса, относятся:

- интеллектуальное развитие учащихся средствами математики;
- усиление по сравнению с традиционными подходами общекультурной составляющей школьного курса математики;
- внимание к мотивационной стороне обучения;
- развитие интереса к математике;
- создание условий для дифференцированного обучения;
- формирование умения применять полученные знания в реальных ситуациях.

Центральная идея — *интеллектуальное развитие учащихся средствами математики* — полностью коррелирует с идеологией новых образовательных стандартов, в которых ставится задача эффективного использования потенциала школьных предметов для развития личностных качеств обучаемых.

Идея развивающего обучения реализуется в учебниках через продуманную систему методических решений. Они содержат достаточный и хорошо организованный учебный материал (теорию и задачи), обеспечивающий формирование универсальных учебных действий. Школьники имеют возможность овладевать исследовательскими и логическими действиями, предполагающими умение видеть проблему, ставить вопросы, наблюдать и проводить эксперименты, делать обобщения, формулировать выводы и умозаключения, проводить доказательства, приводить примеры и контрпримеры, сравнивать и классифицировать.

Эффективности интеллектуального развития способствует понимание и осознание самого *процесса мыслительной деятельности* (механизмов рассуждений, умозаключений). Поэтому в новых изданиях учебников инициируется рефлексия способов и условий действий, акцентируется внимание на собственно процессе решения проблемы.

Развитие мышления тесно связано с развитием речи, со способностью говорить, выражать свои мысли. Свидетельством чёткого и организованного мышления является грамотный математический язык. Обучение математическому языку как специфическому средству коммуникации в его сопоставлении с реальным языком авторы считают важнейшей задачей обучения, для решения которой используются адекватные методические приёмы.

Отличительной особенностью учебников является внимание к развитию и формированию гибкости мышления. Этому, в частности, способствует включение в теоретический и задачный материал фрагментов, иллюстрирующих внутренние связи алгебры и геометрии. Понимание взаимосвязи этих предметов способствует формированию способности к варьированию способов действия, к перестройке уже имеющихся знаний, к решению задач, опирающихся на неочевидные связи и отношения между понятиями и фактами.

Состав учебно-методического комплекта

Учебники предъявляют содержание и идеологию курса, обеспечивают организацию учебного процесса:

Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, с 2013 г.

Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, с 2014 г.

Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, с 2014 г.

Для эффективной организации учебного процесса целесообразно использовать следующие пособия, дополняющие данные учебники и образующие с ними учебно-методический комплект:

- Минаева С. С., Рослова Л. О. Алгебра. Рабочая тетрадь. 7, 8, 9 классы. — М.: Просвещение, 2009—2014.
- Евстафьева Л. П., Карп А. П. Алгебра. Дидактические материалы. 7, 8, 9 классы. — М.: Просвещение, 2006—2014.
- Алгебра. Тематические тесты. 7, 8, 9 классы / [Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова, С. Б.Суворова]. — М.: Просвещение, 2009—2014.
- Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О. Алгебра. Контрольные работы. 7—9 классы. — М.: Просвещение, 2008—2014.
- Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, с 2014 г. (размещено на сайте www.prosv.ru).

- Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, с 2014 г. (размещено на сайте www.prosv.ru).
- Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, с 2014 г. (размещено на сайте www.prosv.ru).

Рабочая тетрадь позволяет увеличить объём выполняемой работы прежде всего на начальном этапе формирования знаний за счёт указаний, подсказок, готовых чертежей.

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной дифференцированной работы учащихся. Они содержат как обучающие, так и проверочные работы, в том числе работы в тестовой форме, снабжённые «ключом» — перечнем верных ответов, а также дополнительный материал для сильных учащихся.

Тематические тесты предназначены для организации текущего оперативного контроля достижения учащимися базовых требований по изучаемой теме, т. е. проверки знания и понимания понятий и их свойств, владения основными алгоритмами, умения применять знания в несложных ситуациях.

В сборнике *контрольных работ* содержатся материалы для тематического контроля — зачёты в четырёх вариантах, итоговые (полугодовые и годовые) контрольные работы, итоговые тесты.

Методические рекомендации — пособие для учителей, имеющие своей целью помочь им в овладении идеологией основными методическими идеями курса, облегчить ежедневную работу по подготовке к урокам.

Характеристика содержания курса алгебры 7—9 классов

В учебниках представлены следующие блоки раздела «Содержание курса» Примерных программ основного общего образования по математике[1]: *арифметика, алгебра, функции, вероятность и статистика, логика и множества*. Кроме того, согласно программам при изложении основного содержания в учебниках там, где это возможно, органично присутствует историко-культурологический фон, что способствует формированию у школьников представлений о роли математики в развитии цивилизации.

При изложении материала сохранены методические решения, оправдавшие себя в практике преподавания. Так, общей методической идеей является структурирование содержания курса по спирали, что позволяет возвращаться к знакомому материалу на новом уровне, включать знания в новые связи, формировать их в системе. При этом последовательно реализуется принцип разделения трудностей. В частности, он отражается в переносе на более поздние сроки, чем это делается обычно, введения некоторых теоретических понятий (функция, тождество, равносильность уравнений), которые появляются, когда учащиеся уже имеют определённые знания, на которые можно опереться, и когда этот материал в большей степени соответствует возрастным возможностям учащихся.

Арифметика. В отличие от традиционного подхода изучение арифметического материала не ограничивается рамками 5—6 классов. Практика показывает, что базовые вычислительные навыки учащихся формируются недостаточно, поэтому учебник для 7 класса начинается с арифметического блока. Здесь ещё раз, на новом уровне, уделяется внимание взаимосвязи обыкновенных и десятичных дробей, обучению различным

---

[1] Примерные программы основного общего образования: Математика. 5—9 классы. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 2011. — (Стандарты второго поколения).

приёмам сравнения дробей, совершенствованию навыков действий с рациональными числами, приёмам решения задач на проценты. Особого внимания заслуживает рассмотрение зависимостей между величинами, работа с формулами, с размерностями. К материалу 7 класса отнесено изучение прямой и обратной пропорциональностей.

В 8 и 9 классах числовая линия получает дальнейшее развитие как в теоретическом, так и в практическом отношении. Сложная в идейном отношении тема о действительных числах распределена между материалом 8 и 9 классов. В 8 классе в теме «Квадратные корни» учащиеся узнают о существовании чисел, не являющихся рациональными, об историческом значении этого факта для развития математики. В 9 классе знания учащихся о числах обобщаются и систематизируются: обсуждаются этапы развития представлений о числе, вводятся необходимые термины и символы, рассматриваются соотношения между различными числовыми множествами, а также вопрос о представлении действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Одновременно на протяжении всего курса через систему упражнений поддерживаются и развиваются вычислительные навыки.

Алгебраические выражения. Введение вопросов, связанных с буквенным исчислением, базируется на знаниях, полученных учащимися в 5—6 классах, где они познакомились с понятием буквенного выражения, приобрели опыт составления буквенных выражений, вычисления их значений. Появление буквенных равенств в 7 классе мотивируется опытом работы с числами, осознанием и обобщением приёмов вычислений. Свойства арифметических действий становятся для учащихся законами преобразований буквенных выражений, при этом список постулируемых законов определяется не принципами независимости и полноты, а методической целесообразностью.

В 7 классе центральным вопросом является изучение действий с многочленами, разложения многочленов на множители, в 8 классе —

изучение действий с алгебраическими дробями. В 9 классе изучение рациональных выражений получает логическое завершение. Особое внимание уделяется вопросу об области определения рационального выражения, при этом смыкаются алгебраический и функциональный подходы к понятию тождества. Доказывая тождества, учащиеся получают возможность осмыслить идею алгебраического доказательства.

Уравнения и неравенства. Развитие формально-оперативных навыков делает естественным переход к алгебраическому методу решения задач, что одновременно служит мотивом для обучения способам решения уравнений. В 7 классе основное внимание уделяется линейным уравнениям. В 8 классе объектом изучения становятся квадратные уравнения. Помимо традиционного для этой темы материала, учащиеся через систему упражнений знакомятся с использованием методов разложения на множители и замены переменной при решении уравнений, а в качестве необязательного изучения материала рассматривается вопрос о нахождении целых корней уравнения.

В 9 классе линия уравнений получает развитие и в теоретическом, и в практическом отношении. Систематизируются и обобщаются сведения о целых уравнениях, затрагивается исторический аспект вопроса о формулах корней целых уравнений, особое внимание уделяется уже встречавшимся в ходе решения задач общим приёмам решения целых уравнений — разложению на множители и замене переменной. Вводятся приёмы решения дробных уравнений.

Особое место в линии уравнений занимает решение текстовых задач. Начиная с 7 класса основным становится алгебраический способ решения задач, владение которым развивается по мере развития линии уравнений. Большой опыт решения арифметических задач, приобретённый учащимися в 5—6 классах, позволяет быстро продвинуться в этом вопросе и даёт возможность наполнить курс более разнообразными видами задач, чем в традиционных учебниках.

Начало изучения вопроса об уравнениях с двумя переменными и их системах относится к 8 классу. За счёт принятого структурирования темы удалось существенно расширить знания учащихся по этому вопросу по сравнению с традиционной практикой. В силу того что к этому времени учащиеся уже умеют решать квадратные уравнения, вопрос об аналитических приёмах решения систем уравнений излагается более компактно и эффективно: одновременно с изучением систем двух линейных уравнений с двумя переменными рассматриваются и системы, содержащие одно уравнение второй степени. В 9 классе основное внимание уделяется нелинейным системам; учащиеся овладевают разнообразными приёмами решения таких систем.

В ходе изучения темы учащиеся решают много текстовых задач.

С изучением уравнений с двумя переменными тесно переплетается материал, связанный с декартовыми координатами на плоскости. Рассматривается уравнение прямой и различные его формы, угловой коэффициент прямой, взаимное расположение прямых на плоскости, уравнение окружности с центром в начале координат. В отдельный пункт вынесено решение задач на координатной плоскости (например, записать уравнение прямой по угловому коэффициенту и точке, по двум точкам, уравнение прямой, параллельной данной, перпендикулярной данной). Подчеркнём, что широкое использование графиков при изучении самых разных вопросов является характерной особенностью курса.

Тема «Неравенства» изучается в курсе 9 класса. Первоначальное изложение вопроса о свойствах неравенств базируется на геометрической трактовке отношений «больше», «меньше», после чего учащиеся переходят к решению линейных неравенств и их систем. В систему упражнений включены задачи, которые решаются с помощью составления неравенств, что расширяет представления учащихся о возможностях применения алгебры.

В завершение рассматриваются различные способы доказательства неравенств, в связи с чем приводится алгебраическая трактовка отношений «больше» и «меньше», а также алгебраическое доказательство свойств неравенств, первоначально сформулированных на основе геометрических представлений. Предусмотренный программой материал дополнен вопросом о графической интерпретации неравенств с двумя переменными и их систем (рубрика «Для тех, кому интересно»).

Функции. В 7 классе рассматриваются графики некоторых простейших зависимостей: $y = x$, $y = -x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$. Особенностью изложения материала является организация весьма разнообразной практической деятельности по построению графиков, в том числе кусочно-заданных. Существенное место отводится анализу и интерпретации графиков реальных зависимостей.

Введение понятия функции, достаточно трудного для учащихся, а также изучение свойств функций относятся к материалу 8 класса. Учащиеся опираются на полученные ранее знания о зависимостях между величинами, а также на имеющиеся к этому времени достаточно обширные графические представления. Разъясняется смысл понятия функции, показывается многозначность использования данного термина. Изложение всего материала базируется на геометрических образах. С помощью графиков учащиеся получают представление о таких общих свойствах функций, как возрастание, убывание и др. Методическая цель состоит в том, чтобы сформировать понимание соответствующих терминов в контексте постановки различных задач, а также связи алгебраического, функционального и графического языков.

В 8 классе рассматриваются функции $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$ и их свойства, в 9 классе — квадратичная функция. Большое место при изучении конкретных функций занимают практические работы, вопросы и задачи прикладного и практического характера, анализ и интерпретация графиков реальных зависимостей.

Числовые последовательности. Основное содержание этой темы, изучаемой в 9 классе, состоит в рассмотрении арифметической и геометрической прогрессий. При этом формируются некоторые общие представления о числовых последовательностях: вводятся соответствующие термины и символы, рассматриваются способы задания последовательностей, различные примеры последовательностей. На содержательном уровне учащиеся знакомятся с некоторыми свойствами числовых последовательностей (монотонность, ограниченность). В учебнике рассматриваются интересные исторические факты и некоторые классические задачи, что позволяет расширить математический кругозор учащихся. Заметим, что формальное определение числовой последовательности как функции натурального аргумента здесь не предусматривается; на этом этапе оно не является дидактически значимым и не отвечает возрастным возможностям учащихся.

При изучении арифметической и геометрической прогрессий широко привлекаются примеры из окружающего мира. Завершается тема решением задач на простые и сложные проценты, что позволяет ещё раз продемонстрировать применение математики в жизни.

Элементы комбинаторики, вероятности и статистики. Изложение вероятностно-статистической линии начато в 5—6 классах. Учащиеся решают комбинаторные задачи доступным им способом перебора всех возможных вариантов, получают некоторые представления о сборе и анализе информации, работают с таблицами и диаграммами. В 7—8 классах вводятся некоторые статистические характеристики ряда распределений: среднее арифметическое, мода, медиана, размах. В этих классах формируется представление о вероятности случайного события, при этом исходным является статистический подход к понятию вероятности — через эксперимент со случайными исходами. В дальнейшем вводится классическое определение вероятности.

При решении комбинаторных задач усиливается роль логических рассуждений, базу для которых составляет опыт, приобретённый в процессе многократного использования метода полного перебора. Разъясняется комбинаторное правило умножения и на его основе выводится простейшая комбинаторная формула — формула для подсчёта числа перестановок.

В курсе 9 класса представлен завершающий фрагмент вероятностно-статистической линии. В ней рассматриваются доступные учащимся примеры статистических исследований, в которых используются полученные ранее знания о способах представления данных и статистических характеристиках. В ходе описания исследований расширяется словарь статистических терминов. Включение данного материала направлено прежде всего на формирование умения понимать и интерпретировать статистические результаты, представляемые, например, в средствах массовой информации. Это предполагает не столько формальное заучивание новых терминов, сколько первое знакомство с понятийным аппаратом этой необходимой каждому человеку области знаний.

При изучении этого материала привлекаются знания из других разделов курса, в частности, вычисляются отношения, проценты, сравниваются дроби и т. д. При решении задач применяется калькулятор, что позволяет активно работать с реальными, практическими данными.

Методические особенности и методический аппарат учебников

К *методическим особенностям* учебников относятся:

- мотивированное и доступное изложение теоретических сведений, широкое использование наглядности, опора на здравый смысл и интуицию;
- структурирование содержания курса по спирали, что позволяет возвращаться к изученному ранее материалу на новом уровне, включать знания в новые связи, формировать их в системе;
- личностно ориентированный стиль изложения, привлечение современных сюжетов, близких жизненному опыту учащихся, в теоретическом и задачном материале.

Всё содержание учебников разбито на главы, каждая глава открывается небольшой преамбулой, которая вводит учащегося в круг рассматриваемых проблем, создаёт определённую мотивацию. Главы делятся на пункты, каждый из которых включает объяснительный текст и упражнения. Объяснительный текст пункта разбивается на законченные смысловые фрагменты, что позволяет читать его последовательно, делая целесообразные паузы и осмысливая прочитанное. Завершается объяснительный текст вопросами и заданиями, которые позволяют проверить, понято ли прочитанное, акцентировать внимание на главном; их задача — организовать работу учащегося с учебным текстом.

Основные упражнения к пункту разбиты на группы **А** (базовый уровень) и **Б** (более высокие уровни); диапазон сложности заданий широк и достаточен для работы с учащимися, имеющими разные уровни подготовки. Ряд заданий снабжён «указателями», которые выделяют в системе упражнений сквозные рубрики, например «Рассуждаем», «Работаем с символами, терминами», «Разбираем способ решения», «Действуем по алгоритму», «Доказываем», «Практическая ситуация», «Верно или неверно» и др. Это позволяет ученику стать активным субъектом учения в плане освоения универсальных учебных действий. К некоторым упражнениям даются советы, подсказки, указания, образцы решений, что помогает быстрому включению ученика в работу.

Каждая глава завершается тремя постоянными рубриками:

- «*Для тех, кому интересно*». Эта рубрика в целом включает большой объём дополнительного материала, не относящегося к обязательному, но тесно примыкающего к изучаемым темам и позволяющего углубить знания учащихся, познакомить их с новыми сюжетами, с новыми задачами и приёмами их решения.
- «*Дополнительные задания*». Эта рубрика расширяет подбор задач и упражнений главы и предназначается для организации индивидуальной и дифференцированной работы учащихся.
- «*Чему вы научились*». Эта рубрика позволяет учащемуся проверить, насколько он овладел обязательными знаниями и умениями, и оценить зону своего актуального развития.

С целью воспитания культуры работы с книгой, обучения поиску необходимой информации в конце учебника даётся предметный указатель.

Учебники предъявляют содержание и идеологию курса, обеспечивают организацию учебного процесса. Каждый учебник дополняется комплектом учебных пособий (рабочая тетрадь, дидактические материалы, тематические тесты, контрольные работы, методические рекомендации).

Компьютерное обеспечение

Компьютерная поддержка курса математики создаёт принципиально новые дополнительные возможности для организации усвоения содержания курса. Она позволяет не только обогатить содержание, но и обеспечить новые активные формы овладения им. Большое количество качественных образовательных ресурсов по всем предметам и классам размещено на сайтах Федерального центра информационных образовательных ресурсов (ФЦИОР) (http://fcior.edu.ru) и Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов (ЕК ЦОР) (http://school-collection.edu.ru), федеральном портале «Российское образование» (http://www.edu.ru) и на прочих образовательных порталах.

На сайте http://school-collection.edu.ru можно найти **электронное издание (ЭИ) «Математика, 5—11 классы»**, созданное по заказу Национального фонда подготовки кадров под руководством В. А. Булычёва при участии авторов учебников по математике Г. В. Дорофеева, С. Б. Суворовой, С. С. Минаевой, Л. О. Рословой.

Не заменяя собой учебник или другие учебные пособия, ЭИ обладает собственными дидактическими функциями:

- предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения математическими фактами; особенное значение это приобретает на этапе введения нового знания;
- отработка в интерактивном режиме элементарных базовых умений;
- усиление значимости и повышение удельного веса в учебном процессе исследовательской деятельности учащихся;
- возможность увеличения объёма предъявляемой для изучения информации, а также собственной практической деятельности ученика;
- увеличение доли содержательной работы ученика за счёт снятия проблем технического характера.

Мультимедийная среда организована таким образом, что при обучении математике более значимыми становятся наблюдение, разного рода эксперименты, математическое моделирование, конструирование. ЭИ содержит список виртуальных лабораторий, включающих инструментарий, который может использоваться учеником как при решении упражнений, снабжая его соответствующим компьютерным инструментом, так и для самостоятельного изучения возможностей применения этого инструментария. Кроме того, учитель может подготовить с помощью любой из виртуальных лабораторий набор собственных примеров для демонстрации и объяснения материала.

Учебный материал распределён в ЭИ по содержательным линиям. Внутри содержательной линии основной информационной единицей является тема, которая подразделяется на пункты. Пункт включает «Основные сведения» — краткий справочный материал, «Знакомство с инструментарием» — звуковое описание, демонстрация возможностей и задания, позволяющие овладеть инструментарием, «Упражнения», в ходе выполнения которых осваивается содержание. В него включены также методические рекомендации учителю по работе с мультимедиакомплексом.

Инструментарий, применяемый в ЭИ, весьма разнообразен, прост в употреблении и вполне адекватен целям обучения математике.

Особый вид упражнений, так называемый «Экспресс-контроль», предназначен для проверки важных практических умений, которыми должен владеть каждый учащийся. Каждый ученик получает один из шести вариантов контрольных заданий, выбранный случайным образом. В ЭИ реализована система общения учителя с учениками в виде классного журнала, одна из функций которого состоит в получении решения ученика на экране компьютера у учителя (причём не только ответа, но и состояния лаборатории).

При изучении вероятностно-статистической линии курса возможно также использование **ИУМК «Вероятность и статистика в школьном курсе математики»**, размещённого на том же сайте.

Планируемые результаты обучения алгебре в 7—9 классах

Рациональные числа. Действительные числа

Выпускник научится:

- сравнивать и упорядочивать рациональные числа; выполнять вычисления с рациональными числами, сочетая устные и письменные приёмы вычислений, применение калькулятора;
- решать арифметические задачи, связанные с пропорциональностью величин, отношениями, процентами; выполнять несложные практические расчёты;
- использовать начальные представления о множестве действительных чисел;
- применять понятие квадратного корня; находить квадратные и кубические корни, используя при необходимости калькулятор;
- использовать в ходе решения задач элементарные представления, связанные с приближёнными значениями величин; понимать, что числовые данные, которые используются для характеристики объектов окружающего мира, являются преимущественно приближёнными, что по записи приближённых значений, содержащихся в информационных источниках, можно судить о погрешности приближения.

Выпускник получит возможность:

- научиться использовать приёмы, рационализирующие вычисления, приобрести привычку контролировать вычисления, выбирая подходящий для ситуации способ;
- развить представление о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел, о роли вычислений в реальной жизни;
- углубить и развить знания о десятичной записи действительных чисел (периодические и непериодические дроби).

Алгебраические выражения

Выпускник научится:

- понимать смысл терминов «выражение», «тождество», «тождественное преобразование»; выполнять стандартные процедуры, связанные с этими терминами; решать задачи, содержащие буквенные данные; выполнять элементарную работу с формулами;

- выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целым показателем и квадратные корни;
- выполнять тождественные преобразования рациональных выражений на основе правил действий над многочленами и алгебраическими дробями;
- выполнять разложение многочленов на множители;
- применять преобразования выражений для решения различных задач из математики, смежных предметов, реальной практики.

Выпускник получит возможность:

- овладеть широким набором способов и приёмов преобразования выражений; применять тождественные преобразования для решения задач из различных разделов курса (например, для нахождения наибольшего/наименьшего значения выражения).

Уравнения. Неравенства

Выпускник научится:

- решать основные виды рациональных уравнений с одной переменной, системы двух уравнений с двумя переменными;
- применять аналитический и графический языки для интерпретации понятий, связанных с понятием уравнения, для решения уравнений и систем уравнений;
- проводить простейшие исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать, имеет ли уравнение или система уравнений решения, и если имеет, то сколько, и т. д.);
- применять свойства числовых неравенств в ходе решения задач;

- решать линейные и квадратные неравенства с одной переменной; решать системы неравенств;
- понимать уравнение как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций, решать текстовые задачи алгебраическим методом; применять уравнения и неравенства для решения задач из различных разделов курса, задач из реальной практики.

Выпускник получит возможность:

- использовать разнообразные приёмы доказательства неравенств;
- использовать широкий спектр специальных приёмов решения уравнений и систем уравнений; уверенно применять аппарат уравнений и неравенств для решения разнообразных задач из математики, смежных предметов, реальной практики.

Числовые функции

Выпускник научится:

- понимать и использовать функциональные понятия и язык (термины, символические обозначения);
- строить графики элементарных функций; описывать свойства числовых функций на основе изучения поведения их графиков;
- понимать функцию как важнейшую математическую модель для описания процессов и явлений окружающего мира, применять язык функций для описания и исследования зависимостей между физическими величинами.

Выпускник получит возможность:

- проводить исследования, связанные с изучением свойств функций, в том числе с использованием компьютера; на основе графиков изученных функций строить более сложные графики (кусочно-заданные, с «выколотыми» точками и т. п.);
- использовать функциональные представления и свойства функций для решения математических задач из различных разделов курса.

Числовые последовательности. Арифметические и геометрические прогрессии

Выпускник научится:

- понимать и использовать язык последовательностей (термины, символические обозначения);
- применять формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессий, и аппарат, сформированный при изучении других разделов курса, к решению задач, в том числе с контекстом из реальной жизни.

Выпускник получит возможность:

- понимать арифметическую и геометрическую прогрессии как функции натурального аргумента; связывать арифметическую прогрессию с линейным ростом, геометрическую с экспоненциальным ростом.

Вероятность и статистика

Выпускник научится:

- использовать простейшие способы представления и анализа статистических данных;
- находить относительную частоту и вероятность случайного события;
- решать комбинаторные задачи на нахождение числа объектов или комбинаций.

Выпускник получит возможность:

- приобрести первоначальный опыт организации сбора данных при проведении опроса общественного мнения, осуществлять их анализ, представлять результаты опроса в табличной форме, в виде диаграммы;
- приводить содержательные примеры использования средних для описания данных;

- приобрести опыт проведения экспериментов со случайными исходами, в том числе с помощью компьютерного моделирования, интерпретации результатов экспериментов.

Содержание учебника для 7 класса

Выбор содержания методических подходов в учебнике для 7 классов осуществлён с учётом возможностей и особенностей восприятия учащихся 12—13 лет, что нашло отражение как в отказе от традиционного рассмотрения на этом этапе некоторых сложных теоретических понятий (функция, тождество, равносильность уравнений), так и в наполнении курса практически значимым, интересным и доступным для детей данного возраста материалом.

В содержание учебника для 7 классов включён блок арифметических вопросов, что отвечает общей концепции курса математики 5—9 классов, согласно которой раздвигаются временные рамки и увеличивается удельный вес арифметической составляющей. Учебник начинается с двух арифметических глав: «Дроби и проценты» и «Прямая и обратная пропорциональность». В них уделяется внимание совершенствованию навыков действий с рациональными числами, в том числе оценочным умениям, вычислениям с процентами, рассмотрению зависимостей между реальными величинами. Основной целью является развитие вычислительной культуры школьников, формирование практико-ориентированных знаний.

К материалу 7 класса при работе по данной системе учебников отнесено начало систематического изучения буквенного исчисления. Алгебраический материал представлен в учебнике дважды. В главе «Введение в алгебру» появление буквенных равенств мотивировано опытом работы с числами, осознанием и обобщением приёмов вычислений. Свойства арифметических действий на этом этапе становятся для учащихся законами преобразований буквенных выражений. Авторы пересмотрели традиционное соотношение функционального и алгебраического подходов к понятию тождественного равенства буквенных выражений. В качестве исходного в данном курсе принят алгебраический подход, что существенно упростило первоначальное изложение трудного в идейном отношении материала и позволило усилить внимание к его практическому аспекту, т. е. к развитию техники преобразований. Основной целью второго алгебраического блока является формирование оперативных умений — выполнять действия с многочленами, а также раскладывать многочлены на множители. Кроме того, систематически предлагаются задания на сокращение дробей.

Развитие формально-оперативных навыков делает естественным переход к алгебраическому методу решения задач, что одновременно служит мотивом для обучения решению уравнений. Основное внимание в 7 классе уделяется линейным уравнениям. Кроме того, рассматриваются уравнения, для решения которых используется способ разложения на множители.

К алгебраическому блоку курса примыкает блок, связанный с работой на координатной плоскости. Его цель — дальнейшее практическое «освоение» координатной плоскости, формирование первичных представлений о графиках, развитие умений анализировать и интерпретировать графики реальных зависимостей. Особенностью изложения материала в этом разделе является организация разнообразной практической деятельности (в том числе по построению графиков кусочно-заданных зависимостей), основанной на небольшом числе доступных пониманию теоретических фактов.

В учебнике получает дальнейшее развитие начатая ещё в 5—6 классах вероятностно-статистическая линия. Вводятся некоторые статистические характеристики ряда распределений: среднее арифметическое, мода, размах. Формируется представление о вероятности случайного события, причём для этого выбран статистический подход к понятию вероятности — через эксперимент со случайными исходами. Решаются комбинаторные задачи: как методом полного перебора, так и на основе комбинаторного правила умножения; вводится формула для подсчёта числа перестановок. Обращаем внимание на постепенность введения этого нового для нашей школы материала, который, вписываясь в традиционное содержание курса, и усиливает его прикладное значение.

Преемственные связи

Учебник алгебры для 7 класса является непосредственным продолжением учебников «Математика. 5 класс» и «Математика. 6 класс» под редакцией Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина. Авторы поставили своей целью создание единой системы учебников для 5—9 классов, в которых преемственные связи прослеживались бы как в содержательном плане, так и в методических подходах. В то же время подчеркнём, что работа по этому учебнику, безусловно, возможна и в том случае, если преподавание математики в 5—6 классах велось по учебникам других авторов. Объясняется это тем, что в отношении объёма предшествующих (опорных) знаний учебник рассчитан на уровень минимально-обязательной математической подготовки. И при переходе на этот учебник учащиеся окажутся в целесообразной с методической точки зрения и комфортной ситуации «второго прохода» (но не дублирования) ряда трудных вопросов. В такой ситуации легче включаться в работу по системе развивающего обучения, когда учащимся нужно проявлять инициативу, обсуждать задания, выполнять их разными способами, искать нестандартные решения.

Параллельно с данным учебником можно использовать любой из имеющихся для 7 класса учебников геометрии, т. е. ни к какому курсу геометрии данный учебник жёстко не привязан. Заметим также, что дети, обучавшиеся по данной системе учебников в 5—6 классах, усваивают геометрию значительно легче, увереннее и осознаннее.

Примерное поурочное планирование учебного материала

Приводимое ниже поурочное планирование носит рекомендательный характер. Оно отражает некоторый усреднённый опыт, и, естественно, в конкретном классе при конкретных условиях число уроков на изучение того или иного пункта, главы может меняться. Тем не менее мы считаем целесообразным поместить примерное планирование в пособие, так как оно служит своего рода ориентиром как для учителя, впервые ведущего преподавание по данному учебному комплекту, так и для опытного учителя. Поурочное планирование поможет увидеть, насколько сильно вы отстаёте или опережаете основную группу учащихся. Если на изучение какого-либо материала у вас уходит существенно больше времени, чем рекомендовано в планировании, это должно послужить сигналом о том, что вы слишком задерживаетесь на этом вопросе, поэтому следует пересмотреть свой план и опустить ряд задач (оставить их для последующего повторения или не рассматривать вовсе).

1-й вариант: 3 урока в неделю, всего 102 урока.

2-й вариант: 4 урока в неделю, всего 136 уроков.

Глава и пункт учебника		**Число уроков**	
		1-й вариант	**2-й вариант**
Глава 1. Дроби и проценты		**11**	**16**
1.1	Сравнение дробей	4	6
1.2	Вычисления с рациональными числами		
1.3	Степень с натуральным показателем		
1.4	Задачи на проценты	2	4
1.5	Статистические характеристики	3	4
	Обзор и контроль	2	2

Глава 2. Прямая и обратная пропорциональность		**8**	**10**
2.1 2.2	Зависимости и формулы Прямая пропорциональность. Обратная пропорциональность	3	4
2.3 2.4	Пропорции. Решение задач с помощью пропорций Пропорциональное деление	3	4
	Обзор и контроль	2	2
Глава 3. Введение в алгебру		**9**	**11**
3.1 3.2	Буквенная запись свойств действий над числами Преобразование буквенных выражений	3	4
3.3 3.4	Раскрытие скобок Приведение подобных слагаемых	4	5
	Обзор и контроль	2	2
Глава 4. Уравнения		**10**	**13**
4.1 4.2	Алгебраический способ решения задач Корни уравнения	3	4
4.3 4.4	Решение уравнений Решение задач с помощью уравнений	5	7
	Обзор и контроль	2	2
Глава 5. Координаты и графики		**10**	**14**
5.1 5.2	Множества точек на координатной прямой Расстояние между точками координатной прямой	4	6

5.3	Множества точек на координатной плоскости		
5.4 5.5 5.6	Графики Ещё несколько важных графиков Графики вокруг нас	4	6
	Обзор и контроль	2	2
Глава 6. Свойства степени с натуральным показателем		**10**	**12**
6.1 6.2	Произведение и частное степеней Степень степени, произведения и дроби	4	5
6.3 6.4	Решение комбинаторных задач Перестановки	4	5
	Обзор и контроль	2	2
Глава 7. Многочлены		**16**	**20**
7.1 7.2 7.3	Одночлены и многочлены Сложение и вычитание многочленов Умножение одночлена на многочлен	5	7
7.4 7.5 7.6	Умножение многочлена на многочлен Формулы квадрата суммы и квадрата разности Решение задач с помощью уравнений	8	10
	Обзор и контроль	3	3
Глава 8. Разложение многочленов на множители		**16**	**21**
8.1 8.2	Вынесение общего множителя за скобки Способ группировки	5	7
8.3 8.4	Формула разности квадратов Формулы разности и суммы кубов	3	4

8.5 8.6	Разложение на множители с применением нескольких способов Решение уравнений с помощью разложения на множители	5	7
	Обзор и контроль	3	3
Глава 9. Частота и вероятность		**7**	**10**
9.1	Случайные события	2	3
9.2 9.3	Частота случайного события Вероятность случайного события	4	6
	Обзор и контроль	1	1
Повторение. Итоговая контрольная работа		**5**	**9**

Методические рекомендации по организации учебного процесса

Глава 1. Дроби и проценты (11 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
1.1. Сравнение дробей 1.2. Вычисления с рациональными числами 1.3. Степень с натуральным показателем	4	О-1—О-4, «*Проверь себя*», П-1—П-5 О-5, «*Проверь себя*», П-6—П-8,	1—6 7—12 13—20
1.4. Задачи на проценты	2	О-7, «*Проверь себя*», П-10, П-11	21—32
1.5. Статистические характеристики	3	О-8, П-12	33—34
Обзор и контроль	2		

Основные цели: систематизировать и обобщить сведения об обыкновенных и десятичных дробях, научить учащихся пользоваться эквивалентными представлениями чисел в ходе решения задач, обеспечить на этой основе дальнейшее развитие вычислительных навыков и умений решать задачи на проценты, сформировать первоначальные умения статистического анализа больших массивов числовых данных.

Обзор главы. Курс 7 класса начинается с блока арифметических вопросов, своего рода «мостика» между 6 и 7 классами. Здесь ещё раз, но уже на новом уровне, уделяется внимание взаимосвязи обыкновенных и десятичных дробей, такому важному элементу вычислительной подготовки школьников, как умение сравнивать дроби, совершенствованию навыков выполнения действий с дробными числами. Формирование вычислительных умений продолжается при изучении пункта «Степень с натуральным показателем». Выполняя разнообразные задания с выражениями, содержащими степени, учащиеся одновременно накапливают знания о степенях, которые послужат основой для изучения в последующем свойств степеней. В систему упражнений включены задания с буквенными данными; это сделано с целью продолжить обучение числовым подстановкам, вычислению значений буквенных выражений; таким образом, последовательно проводится начатая в 5 классе идея «от чисел к буквам».

В отдельный пункт в данной главе выделено решение задач на проценты. По сравнению с 6 классом, где проценты рассматривались дважды — в связи с изучением обыкновенных и десятичных дробей, здесь предлагаются некоторые новые типы задач; совершенствуется владение такими базовыми техническими приёмами, как переход от процентов к дробям и обратно; уделяется внимание умению работать с «большими» процентами, с дробными процентами. Подчеркнём, что этот материал помимо собственной учебной цели выполняет ещё одну важную функцию: он позволяет продемонстрировать применение математики в быту, в экономике, в социологии и т. д.

Завершается глава пунктом «Статистические характеристики», в котором продолжается начатое в 5—6 классах изучение описательной статистики. Учащиеся знакомятся с такими понятиями описательной статистики, как среднее арифметическое, мода, размах, и приобретают первоначальные умения их применения для анализа массивов числовых данных.

Начиная с этой главы при решении задач предполагается регулярное использование калькулятора для выполнения громоздких вычислений. Здесь он применяется для нахождения приближённых десятичных значений обыкновенных дробей с большими знаменателями, для вычисления степеней с большими показателями, для получения ответа при решении некоторых задач на проценты, для вычисления статистических характеристик больших массивов числовых данных. Калькулятор позволяет обогатить систему упражнений, включить в неё экспериментальную работу с числами, задания с реальными числовыми данными, что важно с точки зрения усиления прикладного аспекта обучения, его практической ориентации. Но при этом его использование ни в коем случае не отменяет «ручные» вычисления. Наоборот, навыки оценки и прикидки результата, эффективные вычислительные приёмы остаются весьма актуальными.

В качестве необязательного материала в пункте «*Для тех, кому интересно*» предлагается небольшой фрагмент, посвящённый исследованию последней цифры степени. В ходе выполнения упражнений учащимся придётся экспериментировать с числами, подмечать закономерности, проводить несложные доказательные рассуждения.

Основные виды деятельности. Сравнивать и упорядочивать рациональные числа. Выполнять вычисления с рациональными числами, вычислять значения степеней с натуральными показателями. Выполнять прикидку и оценку в ходе вычислений.

Использовать эквивалентные представления дробных чисел при их сравнении и в вычислениях. Проводить несложные исследования, связанные со свойствами дробных чисел, опираясь на числовые эксперименты (в том числе с использованием калькулятора, компьютера).

Осуществлять поиск информации (в СМИ), содержащей данные, выраженные в процентах, интерпретировать эти данные. Решать задачи на проценты и дроби (в том числе задачи из реальной практики, используя при необходимости калькулятор).

Приводить примеры числовых данных (цена, рост, время на дорогу), находить среднее арифметическое, моду и размах числовых наборов, в том числе извлекая необходимую информацию из таблиц и диаграмм. Приводить содержательные примеры использования среднего арифметического, моды и размаха для описания данных (демографические и социологические данные, спортивные показатели и т. д.)

Комментарий к использованию ЭИ. Работа с ЭИ позволяет повторить действия с обыкновенными и десятичными дробями, отработать в интерактивном режиме навыки выполнения действий с выражениями, содержащими степени, закрепить определения основных числовых характеристик выборки и получить практические навыки их вычислений.

Упражнения п. 1.3 «Степень с натуральным показателем» используются на этапе формирования соответствующих понятий после изучения материала учебника. Решения заданий 1 и 2 полезно вывести на большой экран и обсудить структуру получающихся выражений. Затем работа строится дифференцированно. Учащимся, нуждающимся в дополнительной отработке основных умений, предлагаются задания 5—7. Интерактивный режим, обеспечиваемый компьютером, позволит каждому увидеть собственные ошибки и исправить их, а задание из рубрики «Экспресс-контроль» – повторно выполнить упражнение, вызвавшее затруднение. Учащимся, усвоившим материал на хорошем уровне, можно с целью самопроверки начать работу с упражнения «Экспресс-контроль», а затем перейти к заданиям 3, 4, 8—10.

Что касается статистических характеристик, то главный акцент следует сделать на качественном поведении числовых характеристик и их практической интерпретации.

Учебник		ЭИ		
Глава	**Пункт**	**Раздел**	**Тема**	**Пункт**
1. Дроби и проценты	1.1. Сравнение дробей	Числа и вычисления	4. Десятичные дроби	4.2. Перевод обыкновенных дробей в десятичные
	1.2. Вычисления с рациональными числами	Числа и вычисления	6. Рациональные числа	6.3. Сложение и вычитание рациональных чисел 6.4. Умножение и деление рациональных чисел
	1.3. Степень с натуральным показателем	Алгебра, 7—9	1. Введение в алгебру	1.3. Степень с натуральным показателем

1.1. Сравнение дробей

Методический комментарий

Основная цель этого пункта – развитие представлений учащихся о дробях и, прежде всего умений сравнивать дроби, которые формировались при изучении курса математики 5—6 классов (акцент здесь сделан на сравнение двух обыкновенных дробей, а также обыкновенной и десятичной дроби).

Из курса 5 класса учащиеся знают, что для сравнения двух обыкновенных дробей с разными знаменателями их можно привести к одному и тому же знаменателю и затем воспользоваться правилом сравнения дробей с одинаковым знаменателем. Теперь им предлагается ещё один общий приём сравнения двух обыкновенных дробей — так называемое «перекрёстное правило»:

чтобы сравнить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, *нужно сравнить произведения* ad *и* bc *и поставить между дробями* $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{c}{d}$ *тот же знак неравенства, что и между произведениями* ad *и* bc.

Объяснение этого правила дано в вводной части пункта и проиллюстрировано примером 1. Чтобы помочь ученикам сопоставить старый и новый приёмы сравнения обыкновенных дробей, можно предложить сравнить двумя способами дроби $\frac{11}{18}$ и $\frac{7}{12}$. Если, применяя старый способ, в качестве общего знаменателя дробей взять произведение $18 \cdot 12$, то и в том, и в другом случае мы, в сущности, выполняем одни и те же действия; но зато при использовании перекрёстного правила общий знаменатель дробей писать не надо. Если же для сравнения дробей старым способом ученики посчитают нужным привести их к наименьшему общему знаменателю, то они увидят, что старый и новый приёмы существенно различаются в техническом отношении. В итоге важно подчеркнуть, что ученики имеют право пользоваться любым правилом сравнения обыкновенных дробей, выбирая тот, который им кажется понятнее и проще.

Перед тем, как перейти к примеру 2, в котором сравниваются обыкновенная дробь и десятичная, полезно вспомнить некоторые сведения о десятичных дробях. Прежде всего, следует напомнить, что десятичные дроби, как и натуральные числа, сравниваются поразрядно — это удобный и легкий способ сравнения. Для проверки владения этим приёмом можно предложить сравнить такие дроби:

0,318 и 0,381; 0,251 и 0,3; 0,0453 и 0,0454; 0,0191 и 0,009.

Далее следует напомнить, что всякую десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной (при этом само чтение десятичной дроби подсказывает, каков знаменатель у равной ей обыкновенной дроби); однако не всякую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной (так, дробь $\frac{1}{3}$ нельзя представить в виде десятичной, а дробь $\frac{1}{2}$ — можно). Обратите внимание на используемую в учебниках терминологию: мы говорим о том, что обыкновенную дробь либо можно представить в виде десятичной, либо нельзя, т. е. на этом этапе мы отказываемся от использования терминов «конечная десятичная дробь» и «бесконечная десятичная дробь». Дело в том, что бесконечные десятичные дроби пока не рассматриваются, и термин «конечная» попросту оказывается лишним; без противопоставления он не нужен. Такой подход упрощает систему используемых понятий. В дальнейшем при изучении темы «Действительные числа» в 9 классе система понятий, а значит, и система терминов будут уточнены и расширены; такой подход к введению понятий часто используется в математике.

Из курса 6 класса учащимся известен признак, по которому можно узнать, обращается обыкновенная дробь в десятичную или нет:

если знаменатель обыкновенной дроби не содержит никаких простых множителей, кроме 2 *и* 5, *то эту обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной*;

если знаменатель несократимой обыкновенной дроби содержит хотя бы один простой множитель, отличный от 2 *и* 5, *то эту обыкновенную дробь нельзя представить в виде десятичной*.

Знание критерия обратимости обыкновенной дроби в десятичную можно проверить с помощью упражнения **5**. Его можно также дополнить такими заданиями:

1) Какие из перечисленных ниже дробей нельзя представить в виде десятичной дроби:

$$\frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{6};\ \frac{5}{8};\ \frac{7}{12};\ \frac{4}{15};\ \frac{9}{20};\ \frac{16}{25}?$$

2) Представьте число в виде десятичной дроби, домножив числитель и знаменатель на подходящее число:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{20};\ \frac{3}{25};\ \frac{7}{50}.$$

3) Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной дроби, выполнив «уголком» деление числителя на знаменатель:

$$\frac{5}{8};\ \frac{13}{40};\ \frac{7}{16}.$$

Разбирая пример 2 из учебника, полезно предложить учащимся сравнить дроби $\frac{5}{8}$ и 0,65 двумя способами, обратив десятичную дробь в обыкновенную, а потом обыкновенную дробь – в десятичную. Далее можно обсудить, какой способ, на их взгляд, лучше.

В примере 3 для упорядочивания чисел предлагается ещё один удобный в практическом отношении приём — замена обыкновенных дробей их приближёнными значениями, выраженными десятичными дробями; при этом приближённые значения находятся с помощью калькулятора. Важно, чтобы учащиеся понимали, что в данном случае процесс деления числителя на знаменатель бесконечен, и калькулятор просто обрывает его, а не показывает точный результат.

В данном пункте калькулятор целесообразно применить при выполнении упражнения 12; выполнив техническую работу с помощью калькулятора, учащиеся смогут сосредоточиться на смысловой стороне выполняемых действий, а также поупражняться в сравнении десятичных дробей.

Из упражнений из раздела **А** в ходе классной работы можно выполнить следующие: **1**, **2** (образец, *б*, г), **4**, *а*, **5**, **6** (*а*, *в*), **7**, **8** (*б*, *г*), **10** (*а*), **11** (*а*, *в*), **12** (обсудить идею и оформление ответа, вычислительную работу — на дом), **13**. В упражнениях из раздела **Б** содержатся некоторые новые идеи. Так, при решении задач **15** и **16** нужно будет выполнить перебор всех возможных вариантов (с этим приёмом учащиеся знакомы уже с 5 класса); ответ на вопрос задачи 17 получается с помощью непосредственной подстановки (никакого решения неравенств здесь не предполагается). Такие задания, как **16** и **18**, — для сильных учащихся.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться упражнениями **1, 3—4, 6, 9, 11, 12**. При наличии времени можно выполнить также упражнения **14, 15, 17** (*а*, *б*).

Комментарий к упражнениям

2. При сравнении чисел в качестве «промежуточного» числа можно брать не только $\frac{1}{2}$, но и другие удобные числа, например, $\frac{1}{4}$, 1, 2.

10. а) Легко расположить в порядке убывания первые три числа: $\frac{1}{3} > 0{,}33 > 0{,}3$; но $\frac{1}{3} < \frac{4}{11}$ (так как $1 \cdot 11 < 3 \cdot 4$), поэтому $\frac{4}{11} > \frac{1}{3} > 0{,}33 > 0{,}3$.

11. Сначала нужно повторить на целых числах правило сравнения отрицательных чисел.

а) Так как $\frac{5}{19} > \frac{2}{9}$, то $-\frac{5}{19} < -\frac{2}{9}$.

12. Доля качественных телевизоров выражается отношением числа телевизоров, признанных годными, к числу выпущенных телевизоров. Каждое отношение выразим приближённо десятичной дробью (можно посоветовать учащимся округлять результаты до тысячных — этого достаточно для сравнения): 0,970; 0,976; 0,988; 0,977; 0,971; 0,962.

Вывод: завод работал лучше всего в среду, хуже всего — в субботу.

15. Всего шесть дробей: $\frac{11}{12}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{12}{11}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{13}{11}$, $\frac{13}{12}$. Найдём среди них дроби, меньшие единицы, и расположим их в порядке возрастания: $\frac{11}{13}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{12}{13}$. Сравним оставшиеся дроби с единицей: дробь $\frac{12}{11}$ больше 1 на $\frac{1}{11}$, дробь

$\frac{13}{11}$ — на $\frac{2}{11}$, $\frac{13}{12}$ — на $\frac{1}{12}$; поэтому $\frac{13}{12} < \frac{12}{11} < \frac{13}{11}$. Запишем все дроби в порядке возрастания: $\frac{11}{13}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{13}{12}, \frac{12}{11}, \frac{13}{11}$.

16. *(Правило умножения.)* Имеем восемь простых чисел: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Числителем дроби может быть любое из этих восьми чисел. Для каждого числителя в качестве знаменателя можно взять любое из семи оставшихся чисел. Всего получим $8 \cdot 7 = 56$ различных дробей: наименьшая из них $\frac{11}{37}$, наибольшая $\frac{37}{11}$. Восемь из составленных дробей меньше $\frac{1}{2}$. В самом деле, с числителем 11 — это дроби $\frac{11}{23}, \frac{11}{29}, \frac{11}{31}, \frac{11}{37}$, с числителем 13 — это дроби $\frac{13}{29}, \frac{13}{31}, \frac{13}{37}$, с числителем 17 — это дробь $\frac{17}{37}$.

17. Нужно подставлять последовательно натуральные числа 1, 2, 3 и т. д.; решение неравенства не предполагается.

1.2. Вычисления с рациональными числами

Методический комментарий

Назначение данного пункта — восстановление и развитие умений выполнять действия с дробными числами, в том числе и с отрицательными дробями.

Идея, которая иллюстрируется примером 1, разобранным в объяснительном тексте, созвучна с содержанием предыдущего пункта: если среди компонентов действия есть и обыкновенные, и десятичные дроби, то их следует привести к одной форме. Учащимся легче будет выполнять подобного рода вычисления, если они будут помнить наизусть некоторые часто встречающиеся факты: например, такие дроби, как $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}$ обращаются в десятичные, а дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ — не обращаются. Полезно также знать некоторые эквивалентные представления дробных чисел, например:

$$\frac{1}{2}=0,5;\ 0,25=\frac{1}{4};\ 0,2=\frac{1}{5}.$$

Целесообразно также, приступая к упражнениям, рассмотреть упражнение **19** сначала целиком: для каждого содержащегося в нем задания ответить на вопрос, в каких дробях следует выполнять действие — в обыкновенных или в десятичных.

В примере 2 разобран уже знакомый учащимся эффективный приём вычисления значений выражения вида $a \cdot b : c$ (или $a : b \cdot c$, или $a : b : c$), содержащих деление на десятичную дробь. Этот приём в общем случае состоит из трёх шагов, каждый из которых предполагает владение соответствующим умением: переход к записи выражения с помощью дробной черты; умножение числителя и знаменателя полученной дроби на такую степень числа 10, которая позволила бы заменить все дробные числа целыми; сокращение дроби.

Особого внимание требует пример 3, в котором вычисляется числовое значение буквенного выражения, т. е. действия с числами здесь выступают уже в роли «технического средства» для достижения цели. Такого рода задания неоднократно включались в систему упражнений в 6 классе. Однако теперь они должны перейти на другой уровень осознанности. В активный словарный запас учащихся должны войти термины: «значение выражения», «числовая подстановка». (Заметим, что термин «переменная» будет введён позже.) Главным результатом изучения данного пункта должно стать умение выполнять числовые подстановки в буквенные выражения. В связи с этим следует обратить внимание на комментарий к примеру 3. В нём указаны все моменты, на которых надо акцентировать внимание учащихся при выполнении числовых подстановок. Это поможет предупредить многие характерные ошибки. Так, при подстановке в выражение $x - y$ чисел $x = -3$ и

y = –4 учащиеся иногда дают такой ответ: 3 – 4. Поэтому важно, чтобы замена букв числами в буквенных выражениях достаточно долго выполнялась с подробной записью.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем прежде всего обратить внимание на следующие упражнения из раздела **А**. Упражнение **29** интересно тем, что информация о числах даётся в геометрической форме и требуется перейти с геометрического языка на алгебраический. Кроме того, есть простой, доступный каждому ученику способ выбора верного утверждения: можно заменить буквы подходящими целыми числами и вычислить указанные выражения.

Комментарий к упражнениям

19. Каждый раз обсуждается вопрос о том, какая форма представления дробей будет использоваться. Перед выполнением заданий (*д*—*з*) нужно вспомнить правила действия с отрицательными числами на простых примерах с целыми данными (особенно это важно в слабом классе).

20. Рекомендуем в каждом случае сопоставить структуру данных числовых выражений и обсудить, чем они отличаются и как это влияет на порядок действий.

21. Запись выражения с помощью дробной черты — трудный момент. Важно, чтобы при переходе к записи в виде дроби не менялся порядок действий. Можно восстановить скобки — как группирующий символ.

в) $0{,}05 : 8{,}1 \cdot 45 = (0{,}05 : 8{,}1) \cdot 45 = \dfrac{0{,}05}{8{,}1} \cdot 45 = \dfrac{0{,}05 \cdot 45}{8{,}1} = \ldots$.

26. Можно сначала обсудить, что в каждом случае берётся число, противоположное числу, заключённому в скобках. Например, $-(x + y)$ — это число, противоположное сумме $x + y$. Поэтому возможно такое решение:

$$x + y = -\frac{1}{3} + 0{,}5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6},\ -(x + y) = -\frac{1}{6}.$$

А можно сразу подставлять числа в данное выражение.

27. В слабом классе советуем вычислять значения выражений по действиям.

28. Подставляя числа вместо букв, получим «многоэтажную дробь», для вычисления значения которой целесообразно использовать основное свойство дроби.

а) При $m = 2$, $n = -\frac{2}{3}$ имеем

$$\frac{m-n}{m} = \frac{2+\frac{2}{3}}{2} = \frac{\left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{6+2}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

<u>1.3. Степень с натуральным показателем</u>

Методический комментарий

Изучение степени с натуральным показателем в 7 классе осуществляется в два этапа. Основная цель данного пункта — накопление знаний о степенях на основе практического опыта, создание своего рода основы для последующей формализации (см. гл. 6 «Свойства степени с натуральным показателем»).

Из курса математики 5—6 классов учащиеся знают, что означают такие числовые выражения, как, например, 6^3, $(-0{,}5)^4$; есть у них и некоторый опыт вычисления степеней. В результате изучения данного пункта они должны твёрдо знать обозначение степени в общем виде и соответствующую терминологию, использовать степени в записи разложения чисел на простые множители, в представлении числа в виде суммы разрядных слагаемых. Кроме того, они должны познакомиться с записью больших и малых чисел с помощью степени числа 10. Наконец, учащиеся должны научиться находить значения степеней с отрицательными основаниями, а также знать, как зависит знак степени с отрицательным основанием от того, чётным или нечётным числом является показатель степени.

Подчеркнём, что все упражнения к пункту выполняются лишь на основе знания того, что выражение a^n, где n — натуральное число, большее 1, означает произведение n множителей, равных a. Никакими формальными правилами действий со степенями учащиеся пока не владеют, и такие упражнения, как, например, **42** и **43**, они должны выполнять по смыслу, опираясь только на указанное определение.

Упражнения раздела **А** весьма разнообразны и позволяют рассмотреть все основные аспекты изучаемого вопроса. В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться упражнениями раздела **А** (возможно, кроме упражнений **42**, **45**, **50**, **57**).

Комментарий к упражнениям

40. Представить степень в виде произведения степеней с одинаковыми основаниями можно разными способами. Например, $5^7 = 5^2 \cdot 5^5$ или $5^7 = 5^3 \cdot 5^4$, $5^{10} = 5^5 \cdot 5^5$ или $5^{10} = 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^5$.

41. д) $729 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$,

$729 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 9^3$,

$729 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 27^2$.

42. Полезно (но не обязательно) вспомнить комбинаторику и указать все возможные варианты такого представления для задания *а*. В заданиях *б* и *в* сделать это труднее, и такая постановка вопроса возможна только для сильных учащихся.

а) Возможны такие варианты: $3^1 \cdot 3^7 = 3^2 \cdot 3^6 = 3^3 \cdot 3^5 = 3^4 \cdot 3^4$.

б) Переберём все варианты. Для этого поступим следующим образом: «зафиксируем» один из показателей и переберём все возможные варианты двух других. Получим пять вариантов:

$$3^1 \cdot 3^1 \cdot 3^6 = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^5 = 3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^4 =$$
$$= \cancel{3^2 \cdot 3^1 \cdot 3^5} = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4 = 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^3 =$$
$$= \cancel{3^3 \cdot 3^1 \cdot 3^4} = \cancel{3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^3} = \cancel{3^4 \cdot 3^1 \cdot 3^3} =$$
$$= \cancel{3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^2} = \cancel{3^5 \cdot 3^1 \cdot 3^2} = \cancel{3^6 \cdot 3^1 \cdot 3^1}.$$

Повторяющиеся варианты вычеркнуты. Их можно было сразу не писать, но так легче рассуждать.

44. Полезно сопоставить структуру данных выражений и обсудить, чем они отличаются и как это влияет на порядок действий.

45. $(30 : 5) - 10^3 = -994$, $\quad 30 : (5 - 10^3) = -0{,}03$,

$(30 : 5 - 10)^3 = -64$, $\quad 30 : (5 - 10)^3 = -3750$.

47. Таблицу удобно заполнять по столбцам, вычисляя последовательно значения степени числа a. Для выполнения второго задания также нужно анализировать таблицу по столбцам. Ответ нужно давать в письменном виде. Например, $a = a^2$ при $a = 0$, $a = 1$.

50. Выполняется письменно. Например, $-(-(-28))^2 = -(28)^2 = -28^2 = -784$.

57. 1 см = $\dfrac{1}{100}$ м $= \dfrac{1}{10^2}$ м $= 10^{-2}$ м;

1 мм = $\dfrac{1}{1000}$ м $= \dfrac{1}{10^3}$ м $= 10^{-3}$ м;

1 мк = $\dfrac{1}{1000000}$ м $= \dfrac{1}{10^6}$ м $= 10^{-6}$ м.

58. б) v = 300 000 км/с = 300 000 000 м/с = $3 \cdot 10^8$ м/с.

59. в) $r = 1{,}4 \cdot 10–7$ мм $= 1{,}4 \cdot \dfrac{1}{10\,000\,000}$ мм = 0,00000014 мм.

60. Разности в скобках отличаются только знаками, т. е. они являются противоположными числами. Так как $2{,}8 - 3{,}4 < 0$ и $(2{,}8 - 3{,}4)^3 < 0$, то $(2{,}8 - 3{,}4)^3 = -(3{,}4 - 2{,}8)^3$. Так как $(3{,}4 - 2{,}8)^3 > 0$ и $-(2{,}8 - 3{,}4)^3 > 0$, то значения этих выражений противоположны числу $(2{,}8 - 3{,}4)^3$.

Приведём другое решение.

Упростим данное выражение $(2{,}8 – 3{,}4)^3 = (–0{,}6)^3$.

Преобразуем другие выражения:

$$(3{,}4 – 2{,}8)^3 = 0{,}6^3,$$

$$–(2{,}8 – 3{,}4)^3 = –(–0{,}6)^3 = 0{,}6^3,$$

$$–(3{,}4 – 2{,}8)^3 = –0{,}6^3.$$

Теперь легко сделать вывод.

62. О т в е т: а) $–1{,}2^2$, $–1{,}2$, $1{,}2$, $(–1{,}2)^2$; б) $–0{,}15$, $(–0{,}15)^3$, $(–0{,}15)^2$, $0{,}15$.

65. О т в е т: $n = 3$, $n = 5$, $n = 8$, $n = 51$.

66. Через 4 недели соответственно имеем:

$100 + 4 \cdot 100 = 500$ (р.), $100 \cdot 1{,}4^4 \approx 384$ (р.).

Таким образом, если копить деньги в течение 4 недель, то первый способ выгоднее.

Через 6 недель соответственно имеем:

$100 + 6 \cdot 100 = 700$ (р.), $100 \cdot 1{,}4^6 \approx 753$ (р.).

Таким образом, если копить деньги в течение 6 недель, то второй способ выгоднее.

Через полгода, т. е. через 24 недели, соответственно имеем:

$100 + 24 \cdot 100 = 2500$ (р.), $100 \cdot 1{,}4^{24} \approx 321\,420$ (р.)

Мы видим резкий рост результата при втором способе увеличения суммы. Этот эффект даёт возведение в степень.

67. Возьмите лист бумаги и проделайте с ним описанные манипуляции. Ученики увидят, что при каждом перегибании толщина удваивается. Получаем:

при первом перегибании — $0{,}1 \cdot 2$ мм,

при втором перегибании — $(0{,}1 \cdot 2) \cdot 2$ мм $= 0{,}1 \cdot 2^2$ мм,

при третьем перегибании — $(0{,}1 \cdot 2^2) \cdot 2$ мм $= 0{,}1 \cdot 2^3$ мм.

Понятно, что после шестого перегибания получим $0{,}1 \cdot 2^6 \approx 6{,}4$ мм.

68. 3) Имеем $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}$.

1.4. Задачи на проценты

Методический комментарий

Первое знакомство с процентами при работе по данной системе учебников происходит в 6 классе. Там проценты рассматривались дважды: сначала в процессе второго «прохода» обыкновенных дробей, а затем при изучении десятичных дробей.

Материал 7 класса позволяет вспомнить известные сведения о процентах и продвинуться в решении задач. Прежде всего, нужно обратить внимание на владение приёмами перехода от процентов к дробям и наоборот, в том числе в сложных случаях, когда речь идёт о дробных процентах, а также о «больших» процентах. В учебнике приведены соответствующие правила. Однако, как показывает опыт, эти правила усваиваются плохо и их формальное применение приводит к ошибкам. Поэтому в случае затруднений можно посоветовать ученикам при решении задач действовать по смыслу или по аналогии с более простым примером. При этом нужно знать лишь, что такое «процент» и в рассуждениях заменять слово «сотая» словом «процент» и наоборот. А к более краткому выполнению действий по правилам они придут по мере накопления опыта.

Например, перейдём от дроби 0,56 к процентам: $0{,}56=\frac{56}{100}$ (читается: 56 сотых), а $\frac{1}{100}$ — это 1 процент; значит, $\frac{56}{100}$ — это 56%. Точно так же $0{,}563=\frac{56{,}3}{100}$, т. е. 0,563 — это 56,3%; $1{,}34=\frac{134}{100}$, т. е. 1,34 — это 134%. Подчеркиваем, что во всех случаях при переходе *от десятичной дроби к* *процентам* мы *умножаем* дробь на 100, т. е. переносим запятую на 2 знака *вправо*.

Выразим 56% десятичной дробью: 56% — это $\frac{56}{100}$, т. е. 56% — это 0,56. Точно так же 56,3% — это $\frac{56,3}{100} = 0,563$; 134% — это $\frac{134}{100} = 1,34$. Во всех случаях при переходе *от процентов к десятичной дроби* мы *делим* дробь на 100, т. е. переносим запятую на 2 знака *влево*.

Задачи к пункту весьма разнообразны. Они не только позволяют вырабатывать необходимые навыки, но и демонстрируют типичные ситуации использования процентов в жизни, широту применения этого понятия.

Типичные приёмы рассуждений, используемые при решении задач, рассмотрены в примерах, приведённых в объяснительном тексте. В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться задачами раздела **А**, причём акцент можно сделать на задачах двух видов — нахождение указанного числа процентов от величины (упражнения **70—73**, **78**, **79**) и выражение отношения величин в процентах (упражнения **80** и **81**); именно такие задачи представлены в обязательных результатах обучения. В ходе классной работы из задач раздела **А** рекомендуем рассмотреть упражнения **69**, **70** (частично), **71** (частично), **72**, **73** (*а*), **74** (*а*), **75**, **77**, **78** (*а*), **81**. Задачу **79** можно предложить решить дома, а затем в классе разобрать другое, оригинальное решение (см. комментарий к упражнениям). Задачи раздела **Б** — более сложные, кроме того, все они разные. В то же время в сильном классе, при наличии времени можно разнообразить систему упражнений ещё и за счёт задач из раздела «*Дополнительные задания*». Заметим также, что с решением задач на проценты учащиеся встретятся ещё в 8 и 9 классах.

Комментарий к упражнениям

71. Часть величины, заданную в процентах, выразим десятичной дробью и найдём дробь от данной величины. Например, для железа: 0,07% — это 0,0007; получим 250 · 0,0007 = 0,175 (мг).

72. б) За счёт премии сумма выплат в декабре увеличилась на 250% и составила 100% + 250% = 350%, значит, она увеличилась в 3,5 раза, так как $\frac{350}{100}$ = 3,5. Имеем 5000 · 3,5 = 17 500 (р.).

73. б) 80% (это 0,8) — такая часть учащихся школы занимается в спортивных секциях; 5% (это 0,05) — часть учащихся, занимающихся в спортивных секциях, занимается также и в шахматной.

1 способ решения:

1) 850 · 0,8 = 680 (уч.) — такое число учащихся занимается в спортивных секциях,

2) 680 · 0,05 = 34 (уч.) — такое число учащихся занимается в шахматной секции.

2 способ решения:

1) 0,8 · 0,05 = 0,04 — такая часть всех учащихся школы занимается в шахматной секции,

2) 850 · 0,04 = 34 (уч.) — такое число учащихся занимается в шахматной секции.

75—77. Каждое задание включает две задачи: прямую — на нахождение процента от величины и обратную — на нахождение величины по проценту. Задачи рекомендуется рассмотреть параллельно и обязательно сопоставить.

79. Кроме прямого и длинного решения по действиям, возможно следующее решение. Товар выгоднее купить там, где он дешевле. В магазине после двух уценок товар стоит 350 · 0,6 · 0,95 (р.), в супермаркете 350 · 0,95 · 0,6 (р.), т. е. столько же, как в магазине, а на ярмарке после уценки товар стоит 350 · 0,55 (р.). Так как 0,6 · 0,95 = 0,57 > 0,55, то правильный о т в е т: на ярмарке.

80. h = 60 м, a = 1,5 км. Выразим величины в метрах и найдём отношение h к a. Имеем: $\frac{60}{1500} = \frac{1}{25}$ = 0,04, т. е. 4%.

83. а) Число детей в детском саду составляет 100%.

1) 100% – 10% = 90% — столько процентов детей детского сада выехало на дачу.

2) 180 детей составляют 90%, т. е. 0,9 всех детей, 180 : 0,9 = 200 (детей) — столько всего детей в детском саду.

85. а) 1) 2 · 0,2 = 0,4 (кг) — масса жира в жирном твороге,

2) 3 · 0,05 = 0,15 (кг) — масс жира в нежирном твороге,

3) 0,4 + 0,15 = 0,55 (кг) — масса жира в смеси,

4) 0,55 : 5 = 0,11 (это 11%) — процент жирности смеси.

86. Такие задачи традиционно сложны для учащихся, так как здесь надо использовать формальное правило нахождения процента данной величины. Можно предварительно разобрать более простые задачи. Например, найти 50% от 50% (т. е. $\frac{1}{2}$ от 50%), 10% от 30% (т. е. $\frac{1}{10}$ от 30%) и т. д.

а) Найдём 40% от 65%. Имеем: 65% · 0,4 = 26%.

87. Если первоначальная цена товара 100%, то цена, увеличенная на 20%, составляет 120% или 1,2 первоначальной цены. После праздничной скидки на 30% цена составила 0,7 предыдущей. Имеем: 1,2 · 0,7 = 0,84, т. е. цена товара составит 84% от первоначальной цены. В ы в о д: скидка фактически составляет 16%.

89. а) 1) Найдём 16% от 50%:

16% — это 0,16; 50% · 0,16 = 8% — такой процент от учащихся школы составляют девочки-спортсменки;

2) найдём 28% от 50%:

28% — это 0,28; 50% · 0,28 = 14% — такой процент от учащихся школы составляют мальчики-спортсмены;

3) 8% + 14% = 22% — столько процентов составляют школьники, которые занимаются в спортивных секциях.

90. б) Примем цену тарелки за 100% и изобразим её в виде отрезка (рис. 1, *а*). Тогда цене блюдца соответствует отрезок, равный $\frac{4}{5}$ данного.

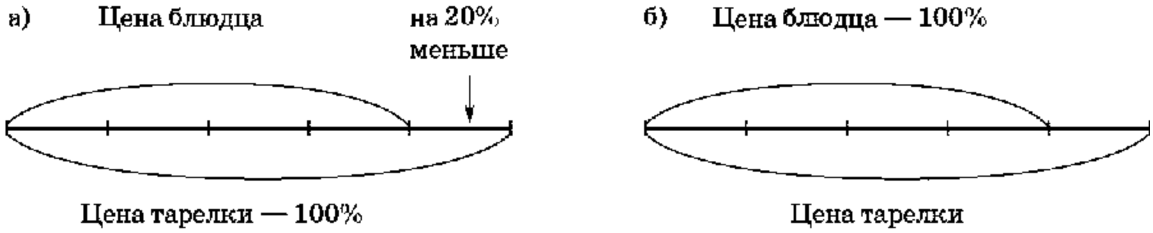

Рис. 1

Чтобы ответить на вопрос задачи, примем теперь цену блюдца за 100% (рис. 1, *б*). Получаем, что цена тарелки составляет 125% цены блюдца (125% — это $\frac{5}{4}$). Значит, тарелка в 1,25 раза дороже блюдца или на 25% дороже блюдца.

в) Рассуждая аналогично предыдущей задаче, представим условие в виде рисунка (рис. 2, *а*). Чтобы узнать, какую часть стоимости чашки составляет стоимость блюдца, необходимо цену чашки принять за 100% (рис. 2, *б*). Тогда из рисунка видно, что стоимость блюдца составляет $\frac{5}{6}$ стоимости чашки, или в процентах

$$\frac{5}{6}\cdot 100 = 83\frac{1}{3}\%.$$

Далее имеем:

$$100 - 83\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}\% \text{ —}$$

на столько процентов блюдце дешевле чашки.

Ответ можно дать в виде десятичной дроби, округлив её до десятых:

$$16\frac{2}{3} = 16{,}66\ldots \approx 16{,}7\%.$$

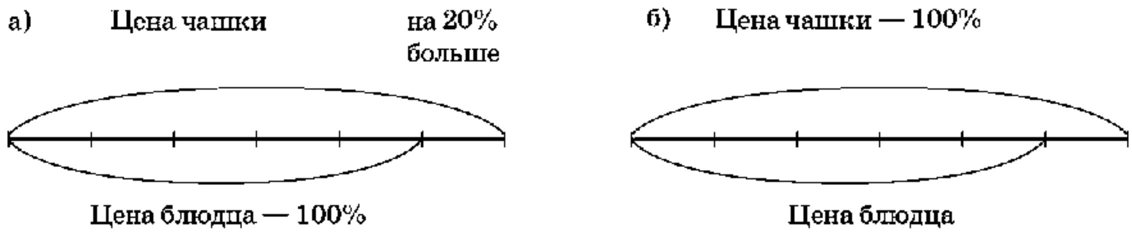

Рис. 2

г) Представим повышение цены книги на 10% на рисунке 3, *а*.

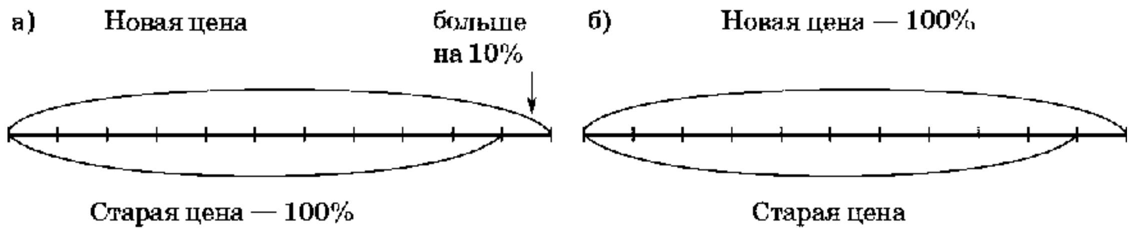

Рис. 3

Приняв новую цену книги за 100% (рис. 3, *б*), получаем, что её старая цена составляет

$$\frac{10}{11},\quad \text{или}\quad \frac{10\cdot 100}{11}\% = 90\frac{10}{11}\%\ \text{ новой цены.}$$

Поэтому цена снижена на

$$100\% - 90\frac{10}{11}\% = 9\frac{1}{11}\%.$$

1.5. Статистические характеристики

Методический комментарий

В этом пункте продолжается знакомство учащихся с описательной статистикой, начатое в 5 и 6 классах, где рассматривались наглядные способы представления информации — таблицы и диаграммы. Основная цель данного пункта — формирование первоначальных представлений о статистическом анализе ряда данных. Учащиеся знакомятся с такими простейшими статистическими характеристиками, как среднее арифметическое, мода и размах. Разнообразные по сюжетам упражнения позволят учащимся не только поупражняться в нахождении этих характеристик, но и увидеть сферу их практического применения, различные содержательные интерпретации. Так, средний рост солдата — это среднее арифметическое приведённого ряда (см. упражнение **94**); размер обуви, пользующийся наибольшим спросом, — это мода ряда размеров (см. упражнение **95**); средний балл спортсмена — это среднее арифметическое выставленных оценок (см. упражнение **98**).

Все упражнения к пункту в принципе не являются трудными (кроме упражнения **107** — задачи исследования). Но нужно иметь в виду, что при выполнении заданий раздела **Б** следует пользоваться вторым способом вычисления среднего арифметического.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем, кроме задач раздела **А**, разобрать ещё, например, упражнения **101** и **106**. В ходе классной работы целесообразно выполнить упражнения **91** (*а*), **92**, **93** (*а*, *б*), **94**, **97**, **101**, **103**, **105**. Для работы дома: упражнения **95**, **96**, **98**, **102**.

Комментарий к упражнениям

101—103. В задачах при нахождении среднего арифметического нужно сумму одинаковых слагаемых заменять соответствующим произведением, как это показано в объяснительном тексте учебника.

102. Мода равна 4, т. к. оценку «4» получили 12 человек (наибольшее количество). Средний результат по контрольной работе находим, разделив общую сумму баллов на количество учеников, писавших работу.

105. б) Указание: умножим среднее арифметическое на 1200.

106. Он скорее всего вычислил для каждой группы сотрудников среднее арифметическое пропущенных дней. В первом случае это ≈ 3,7 дней, а во втором — ≈ 1,65 дней.

107. 2) Выводы делаются на основе наблюдений при выполнении первого задания.

а) Среднее арифметическое и мода ряда увеличатся на это же число, размах не изменится.

б) Среднее арифметическое, мода ряда и размах изменятся во столько же раз.

1.6. Последняя цифра степени

(*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

В этом пункте представлен материал, который может оказаться вполне посильным и интересным многим учащимся. Интерес может вызвать уже то, что, оказывается, совсем нетрудно узнать, какой цифрой оканчивается такое огромное число, как, например, 2^{100}. Для этого нужно немного поэкспериментировать и подметить закономерность, по которой меняется последняя цифра степени с основанием 2. Из опорных умений, необходимых для выполнения упражнений к данному пункту, помимо умения возводить последовательно число в натуральную степень, нужно ещё уметь выполнять деления с остатком.

Комментарий к упражнениям

108. Будем последовательно возводить в степень число 3 и наблюдать, как меняется последняя цифра:

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, степени числа 3 могут оканчиваться цифрами 3, 9, 7 и 1, которые повторяются через четыре шага.

Так как $10 = 4 \cdot 2 + 2$, то степень 3^{10} оканчивается такой же цифрой, что и 3^2, т. е. цифрой 9. Так как $15 = 4 \cdot 3 + 3$, то степень 3^{15} оканчивается цифрой

7; так как 120 кратно 4, то степень 3^{120} оканчивается цифрой 1; так как 126 = = 4 · 32 + 2, то степень 3^{126} оканчивается цифрой 9.

109. Имеем: $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16\ 807$, т. е. через четыре шага последние цифры повторяются. Таким образом, степени числа 7 оканчиваются цифрами 7, 9, 3, 1.

110. При делении показателя 10 на 4 в остатке получается число 2. Такой же остаток получается при делении на 4 показателя 102. Значит, числа 2^{10} и 2^{102} оканчиваются одной и той же цифрой.

111. Надо показать, что при делении чисел 33, 333 и 3333 на 4 получается один и тот же остаток.

112. Это числа 5 и 6, а также любые числа, оканчивающиеся цифрами 0, 1, 5, 6.

113. Числа 4^m и 4^n оканчиваются одной и той же цифрой, если числа m и n — оба чётные или оба нечётные.

114. Сумма $11^{14} + 3^{22}$ делится на 10, так как слагаемое 11^{14} оканчивается цифрой 1, слагаемое 3^{22} — цифрой 9, а их сумма — цифрой 0. Разность $7^{20} - 9^{10}$ делится на 10, так как уменьшаемое 7^{20} оканчивается цифрой 1, вычитаемое 9^{10} — цифрой 1, а значит, разность — цифрой 0. Произведение $12^{15} \cdot 15^{12}$ содержит множители 2 и 5, а следовательно, делится на 10.

Дополнительные задания

Указания и решения

116. Имеем: $\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9} = \dfrac{128}{315} > \dfrac{1}{3}$, так как $\dfrac{1}{3}$ от 315 составляет 105.

117. а) Преобразуем каждую дробь с помощью основного свойства дроби и вычислим её значение:

$$\frac{1,4\cdot6\cdot0,28\cdot1000}{0,24\cdot0,2\cdot21\cdot1000} = \frac{14\cdot6\cdot28}{24\cdot2\cdot21} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3},$$

$$\frac{6,9\cdot 9,6\cdot 0,05\cdot 10000}{4\cdot 0,36\cdot 10000}=\frac{69\cdot 96\cdot 5}{4\cdot 36\cdot 100}=\frac{230}{100}=2,3.$$

Сравним результаты: $2\frac{1}{3}>2,3$. Значит, первая дробь больше.

123. а) Значение первого выражения равно $-\frac{13}{64}$, а значение второго выражения равно $-\frac{11}{27}$. Так как $\frac{13}{64}<\frac{11}{27}$, то $-\frac{13}{64}>-\frac{11}{27}$.

125. б) 2 кг составляют 32% — это 0,32; 2 : 0,32 = 6,25 (кг) — столько было винограда.

126. б) 2000 р. должны «вернуться» к покупателю. Это произойдёт в том случае, если 10% (т. е. 0,1) стоимости покупаемого товара составят не менее 2000 р. Имеем: 2000 : 0,1 = 20 000 (р.) — на такую минимальную сумму покупателю надо приобрести товар в течение года.

127. Старшеклассников на 30% больше, чем студентов, и эти 30% составляют 252 человека. Имеем: 252 : 0,3 = 840 — столько спортсменов участвуют в кроссе.

130. Из 1 кг неочищенных орехов получится 0,4 кг очищенных орехов. Если 0,4 кг очищенных орехов стоят 100 р., то 1 кг таких орехов стоит $\frac{100}{0,4}$ = 250 р.

131. 1) 1000 · 0,045 = 45 (кг) — столько килограммов жира в 1000 кг молока;

2) 45 : 0,75 = 60 кг — столько килограммов сливочного масла можно получить из 1000 кг молока.

135. Разделим 100% пропорционально числам 5 и 3. Получим: в пансионате 62,5% всех номеров составляют однокомнатные номера и 37,5% — двухкомнатные номера. Тогда 62,5 · 0,16 = 10% однокомнатных и 37,5 · 0,04 = 1,5% двухкомнатных номеров, т. е. всего 11,5% номеров оборудовано для отдыхающих с детьми.

136. Среднее арифметическое равно этому же числу.

137. Таким являются, например, числа 2, 5, 8. В самом деле, $\frac{2+5+8}{3}$ = 5.

Таким примеров можно придумать сколько угодно; нужно, чтобы сумма первого и третьего числа была равна удвоенному второму числу.

Совпадать с наибольшим или с наименьшим из трёх чисел среднее арифметическое не может. (Это легко доказать «от противного»).

138. а) Например, 1, 5, 6, 8. В самом деле, $\frac{1+5+6+8}{4}$ = 5.

Поясним идею решения задачи. Должно выполняться условие $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = a_2$. Значит, $a_1 + a_3 + a_4 = 3a_2$. Таким образом, сумма первого, третьего и четвёртого чисел должна равняться утроенному второму числу.

139. а) По условию $\frac{a_1+a_2+...+a_{10}}{10}$ = 4, значит, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 40$.

б) Всего в ряду 7 чисел, и их среднее арифметическое равно 14. Составим уравнение: $2 + 7 + 10 + x + 18 + 19 + 27 = 14 \cdot 7$. Упростив его, получим: $x + 83 = 98$. Найдём неизвестное число: $x = 15$.

140. а) Сумма десяти чисел равна 50. Если к ряду этих чисел приписать число 16, то сумма будет равна 66, а чисел станет 11. Найдём среднее арифметическое: $\frac{66}{11}$ = 6.

б) Среднее арифметическое равно частному $\frac{32-11}{7}$ = 3.

141. Среднее арифметическое равно частному

$$\frac{15\cdot 8+14\cdot 12}{8+12} = 14{,}4.$$

<u>Глава 2. Прямая и обратная пропорциональность (8 уроков)</u>

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	**Число уроков**	**Дидактические материалы**	**Рабочая тетрадь**
2.1. Зависимости и формулы 2.2. Прямая пропорциональность. Обратная пропорциональность	3	О-11, О-12, П-19—П-23	35—41 42—46
2.3. Пропорции. Решение задач с помощью пропорций 2.4. Пропорциональное деление	3	О-13, «*Проверь себя*», П-24—П-26	47—50 51—60
Обзор и контроль	2		

<u>Основные цели:</u> сформулировать представление о прямой и обратной пропорциональностях как специальных видах зависимостей между двумя величинами; ввести понятие пропорции и показать возможность решения задач с помощью пропорций; разъяснить смысл понятия «пропорциональное деление» и продемонстрировать его применение в реальных ситуациях.

<u>Обзор главы.</u> В содержательном отношении данная глава может расцениваться как вводный фрагмент в функциональную линию курса алгебры. Начинается она с рассмотрения примеров зависимостей между величинами и описания их формулами. Далее рассматривается центральный вопрос темы — прямо пропорциональная и обратно пропорциональная зависимости. Учащиеся должны понимать, что этими словами обозначены два широко распространённых вида зависимостей, с которыми они постоянно имеют дело и в жизни, и при изучении школьных предметов. Даются определения прямой и обратной пропорциональностей, обсуждаются их характеристические свойства, а также общий вид формул, которыми они описываются.

Далее вводится понятие пропорции, и тем самым расширяется «технический арсенал» школьников; они учатся решать уже знакомые задачи с помощью пропорций.

Завершается глава вопросом о пропорциональном делении, что может рассматриваться как обобщение знакомого учащимся из курса 6 класса приёма деления величины в заданном отношении.

Основные виды деятельности. Моделировать несложные зависимости с помощью формул; выполнять вычисления по формулам, выражать из формулы одни величины через другие. Распознавать прямую и обратную пропорциональные зависимости. Использовать свойства прямой и обратной пропорциональности для выполнения практических расчётов. Решать текстовые задачи на прямую и обратную пропорциональные зависимости, на пропорциональное деление (в том числе с контекстом из смежных дисциплин, из реальной жизни). Анализировать и осмысливать текст задачи, моделировать условие с помощью схем, строить логическую цепочку рассуждений; критически оценивать полученный ответ, осуществлять самоконтроль, проверяя ответ на соответствие условию.

Комментарий к использованию ЭИ. Электронная поддержка поможет организовать быстрое и эффективное повторение соответствующего материала, изучавшегося в 6 классе.

<table>
<tr><th colspan="2">Учебник</th><th colspan="3">ЭИ</th></tr>
<tr><th>Глава</th><th>Пункт</th><th>Раздел</th><th>Тема</th><th>Пункт</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>2.3. Пропорции. Решение задач с помощью пропорций</td><td rowspan="2">Числа и вычисления</td><td rowspan="2">5. Отношения</td><td>5.1. Что такое отношение</td></tr>
<tr><td>2.4. Пропорциональное деление</td><td>5.2. Деление в данном отношении</td></tr>
</table>

2.1. Зависимости и формулы

Методический комментарий

Этот пункт является своего рода преамбулой к изучению центрального вопроса главы — прямой и обратной пропорциональностей. Здесь учащиеся рассматривают примеры зависимостей между величинами, на основе которых будут вводиться указанные понятия, и выполняют разнообразную работу с формулами, описывающими эти зависимости. По содержанию этот пункт продолжает практическую деятельность с формулами, начатую в 6 классе.

В объяснительном тексте вводится новое понятие — *переменная*. Естественно, никакого определения этому понятию не даётся; просто разъясняется, что так мы теперь будем называть буквы, обозначающие изменяющиеся величины. Слово «переменная» должно войти в активный словарный запас школьников. Одновременно, в качестве антонима, вводится термин «постоянная» (или «константа»).

Система упражнений к пункту достаточно богата и разнообразна с точки зрения предъявляемых сюжетов и видов формул, с которыми учащимся придётся иметь дело. Через неё реализуется одна из основных идей курса —

прикладная и практическая ориентация обучения математике, связь с жизнью, с другими учебными предметами (геометрией, физикой).

Упражнения раздела **А** направлены в основном на формирование умений вычислять по формулам, причём проводимые вычисления не абстрактны, а всегда являются средством для ответа на поставленный вопрос. Кроме того, продолжается формирование умений выражать переменные из формул (оно основано на знании зависимостей между компонентами арифметических действий, упражнения **148—150**), а также составлять формулы, описывающие несложные ситуации (упражнения **142** и **143**).

Упражнения раздела **Б** — более трудные и в содержательном, и в техническом отношении. Здесь акцент, в частности, сделан на переход от одних единиц измерения к другим, что обычно является для учащихся делом нелёгким. Рекомендуем для выработки соответствующего умения предлагать учащимся упражнения такого типа:

1. Выразите скорость, равную 80 м/мин, в километрах в час.

2. Выразите скорость, равную 4,5 км/ч, в метрах в минуту.

Важен последовательный осознанный переход от одних единиц к другим. Можно практиковать такую запись:

$$80\ \frac{\text{м}}{\text{мин}} = \frac{80}{1000}\ \frac{\text{км}}{\text{мин}} = \frac{80\cdot 60}{1000}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 50\ \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$4{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 4{,}5\cdot 1000\ \frac{\text{м}}{\text{ч}} = \frac{4{,}5\cdot 1000}{60}\ \frac{\text{м}}{\text{мин}} = 75\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

Для выполнения трудоёмких вычислений следует использовать калькулятор (например, при решении упражнений **155—158**).

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем прежде всего выполнить упражнения **142—145**, **147** (*а*), **148—150**. Из раздела **Б** при наличии времени можно рассмотреть упражнения **151, 153, 156, 157**.

Комментарий к упражнениям

146. Выразим нормальную температуру тела человека, принятую в России, в градусах Фаренгейта:

(1,8 · 36,6 + 32)°. Имеем: 97,88°F. Так как 97,88 < 98,8 то более высокой в качестве нормальной принята температура там, где она измеряется по шкале Фаренгейта.

Дополнительный вопрос: какая температура по шкале Цельсия соответствует нормальной температуре по шкале Фаренгейта? (Ответ: 37,1°C).

147. В условии задано расстояние; оно равно 1 км.

а) $t = \frac{1}{80}$ ч $= \frac{60 \cdot 60}{80}$ с $= 45$ с;

б) 1 мин 12 с = 1,2 мин = $\frac{1,2}{60}$ ч $= \frac{1}{50}$ ч; $v = \dfrac{1 \text{ км}}{\frac{1}{50} \text{ ч}} = 50 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Замечание. Предварительно нужно проверить знание соотношения между единицами длины и времени.

149—150. Переменные выражаем на основе зависимости между компонентами действия.

151. Полезно подсчитать устно по формуле ещё несколько значений S, подставляя в формулу, например, такие значения переменной t: 10 с, 3 с.

152. В формулу $\upsilon = \frac{In}{t}$ подставим значения переменных. Получим:

$$\frac{60 \cdot 700 \text{ см}}{5 \text{ мин}} = \frac{60 \cdot 700 \cdot 60}{5 \cdot 100000} \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{504}{100} \frac{\text{км}}{\text{ч}} \approx 5 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

153. 1 этаж — 5 ступенек,

2 этаж — (5 + 16) ступенек,

3 этаж — (5 + 16 · 2) ступенек,

4 этаж — (5 + 16 · 3) ступенек,

……

Отсюда понятно, что формула имеет вид $N = 5 + 16 \cdot (n - 1)$ и переменные могут принимать только натуральные значения.

154. Так как 1 км электропоезд проходит за 1,5 мин, то его скорость равна $\frac{1}{1{,}5}\ \frac{\text{км}}{\text{мин}} = \frac{1 \cdot 60}{1{,}5}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 40\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Чтобы сократить время на полминуты, электропоезд должен проходить 1 км за 1 мин. Тогда его скорость будет равна 60 км/ч, т. е. нужно увеличить скорость на 20 км/ч.

155. На первом участке бегун развил скорость, равную $\frac{250}{50}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{5 \cdot 60 \cdot 60}{1000}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 18\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, на втором — примерно равную 18,9 км/ч, на третьем — примерно равную 19,3 км/ч. Он бежал с нарастающей скоростью.

156. Ответ: на 5,6%.

157. Выразим 30 см и 35 см в дюймах; получим соответственно 12 дюймов и 14 дюймов. Подставив их в соответствующие формулы, получим следующие размеры: 14 и 16.

158. В России: P = 180 – 100 = 80 (кг).

Чтобы воспользоваться второй формулой, нужно 180 см выразить в дюймах. Ответ будет получен в фунтах; его надо выразить в килограммах:

$$180\ \text{см} = \frac{180}{2{,}54}\ \text{дюйма};$$

$$W = \left(\frac{11}{2} \cdot \frac{180}{2{,}54} - 220\right)\ \text{фунтов};$$

$$W = \left(\frac{11}{2} \cdot \frac{180}{2{,}54} - 220\right) \cdot 0{,}454\ \text{кг} = 77\ \text{кг}.$$

Мы записали числовое выражение, которое на калькуляторе можно вычислять непрерывной цепочкой, без фиксации промежуточных результатов. Возможно, что учащимся будет понятнее, если решать задачу по действиям, доводя каждый раз результат до числа.

2.2. Прямая пропорциональность. Обратная пропорциональность

Методический комментарий

Изучение прямой и обратной пропорциональностей строится по одному и тому же плану: рассматривается вводный пример, даётся определение и показывается использование нового термина в речи; затем рассматривается алгебраический способ описания зависимости — с помощью формулы определённого вида; наконец формулируется свойство зависимости данного вида.

Важно, чтобы учащиеся осознали, что хотя прямая и обратная пропорциональности очень часто встречаются в жизни, вовсе не все зависимости относятся к одному из этих видов. В результате изучения пункта они должны распознавать прямую и обратную пропорциональности и приводить примеры, а также называть зависимости, не относящиеся ни к одному из указанных видов. Они должны понимать смысл оборотов речи типа: «при постоянной скорости путь *пропорционален* времени движения»; «при постоянном объёме работы время *обратно пропорционально* производительности».

Выработке соответствующих умений способствуют упражнения к пункту. Заметим, что разбор очередной задачи не следует начинать с вопроса: «Какая здесь зависимость?» Ученики могут вначале рассуждать, опираясь на здравый смысл, а уж потом делать вывод о наличии той или иной зависимости.

Упражнения раздела **Б** достаточно трудные, особенно упражнения **174** и **175.** Поэтому в классах с невысоким уровнем подготовки следует ограничиться заданиями раздела **А**. Для работы в классе из раздела **А** рекомендуем упражнения **161—163, 165, 167** (*а*), **169—171**.

Комментарий к упражнениям

160. Удобно записать на доске краткое условие:

7 с — 20 л

? с — 200 л

Ученик рассуждает следующим образом: «Так как объём бака увеличился в 10 раз, а скорость наполнения бака водой осталась прежней, то и время должно увеличиться в 10 раз. Значит, на наполнение 200 л потребуется 70 с, т. е. 1 мин 10 с».

Дополнительный вопрос: какой зависимостью связаны объём бака и время его наполнения при постоянной скорости работы электромотора?

161. а) Формула $C = 5t$ имеет вид $y = kx$, где x и y — переменные, k — число. Следовательно, это прямая пропорциональность. Коэффициент пропорциональности равен $\frac{C}{t} = 5$ (р./мин) — это стоимость в рублях 1 мин разговора.

Можно рассуждать и так. При увеличении времени разговора в несколько раз его стоимость увеличивается во столько же раз. Значит, эта зависимость — прямая пропорциональность.

б) Данная формула не имеет вид $y = kx$. Следовательно, эта зависимость не является прямо пропорциональной. В случае затруднений в этом можно убедиться следующим образом: если $n = 2$, то $N = 80$; если $n = 4$, то $N = 140$; т. е. при увеличении n в 2 раза N не увеличивается в 2 раза.

164. 2 кролика — 120 дней,

10 кроликов — ? дней.

Кроликов стало в 5 раз больше, значит, они в 5 раз быстрее съедали весь корм, т. е. дней уйдет в 5 раз меньше; таким образом, корма хватит на 24 дня. Зависимость между количеством кроликов и числом дней, на которые хватит данного запаса корма, обратно пропорциональная.

167. Развешиваемая масса чая постоянна. Чем больше масса упаковки, тем меньшее количество упаковок потребуется и наоборот. Зависимость между массой упаковки и количеством упаковок, необходимым для развеса одной и той же массы чая, обратно пропорциональная.

а) Для заполнения таблицы рассуждаем так:

240 г больше 60 г в 4 раза, следовательно, потребуется 80 : 4 = = 20 упаковок,

30 г меньше 60 г в 2 раза, следовательно, потребуется 80 · 2 = = 160 упаковок,

300 г больше 30 в 10 раз, следовательно, потребуется 160 : 10 = = 16 упаковок.

172. Запишем кратко условие:

4 машинистки — 3 дня — 222 страницы

2 машинистки — 12 дней — ? страниц

Четыре машинистки за 3 дня напечатали 222 страницы; две машинистки за 3 дня напечатали в 2 раза меньше, т. е. $\frac{222}{2}=111$ страниц. Две машинистки за 12 дней напечатают в 4 раза больше, т. е. 444 страницы.

173. а) Производительность труда увеличилась на 20%, т. е. в 1,2 раза. Тогда время выполнения этой же работы должно уменьшиться в 1,2 раза, т. е. на облицовку подъезда потребуется $\frac{18}{1,2}=15$ (дней).

174. Приведём разные решения.

Способ 1. Количество новых кустов составляет $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ от количества старых. Значит, урожайность увеличилась в $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ раза. Так как $1\frac{1}{3}\approx 1{,}33,$ то урожайность нового куста составляет 133% от урожайности старого, т. е. она увеличилась на 33%.

Способ 2. С одного куста собирали $\frac{1}{8}$ часть урожая, а стали собирать $\frac{1}{6}$ часть урожая, т. е. на $\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$ часть урожая больше. Найдём, какой процент составляет $\frac{1}{24}$ от $\frac{1}{8}$. Имеем: $\frac{1}{24}:\frac{1}{8}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33,$ а это примерно 33%.

175. Масса пряников в упаковке была 100% и стала 125%, т. е. увеличилась в $\frac{5}{4}$ раза, а стоимость упаковки осталась прежней, следовательно, цена пряников во столько же раз уменьшилась. Примем прежнюю цену за $1,$ тогда новая цена стала $1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5},$ т. е. меньше прежней на $\frac{1}{5},$ иначе — на 20%.

176. а) Расходы столовой сначала увеличились в 1,2 раза и затем, в связи с подорожанием муки, увеличились ещё в 1,5 раза, следовательно, всего они увеличились в 1,2 · 1,5 = 1,8 раза.

2.3. Пропорции. Решение задач с помощью пропорций

Методический комментарий

Прежде всего, нужно убедиться, что учащиеся помнят, что называют отношением (с этим понятием они познакомились в 6 классе). Для этого можно предложить такие вопросы:

1. Вычислите отношение: а) 4 : 12; б) 100 : 75; в) 1,5 : 3,5.

2. Запишите несколько отношений, равных: а) 3; б) $\frac{1}{2}$.

3. После контрольной работы учитель проверил 10 тетрадей учеников, и ему осталось проверить ещё 20. Что показывает отношение: а) 1 : 30; б) 20 : 30; в) 20 : 10?

После этого можно ввести понятие *пропорции*. Заметим, что часто пропорцией называют равенство двух отношений. Это формулировка в силу её двусмысленности не очень удачна. В самом деле, отношения $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{6}$ равны, но пропорции здесь нет.

Для проверки осознанности усвоения нового понятия полезны также устные упражнения:

1. Используя какие-либо из отношений $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{12}{18}$ составьте пропорцию.

2. Составьте какую-нибудь пропорцию, в которой каждое из отношений равно: а) $\frac{1}{4}$; б) 5; в) 0,2.

Важно, чтобы учащиеся понимали смысл требования: «выясните, является ли данное равенство пропорцией», и умели решать эту задачу разными способами (по определению, проверяя, равны ли отношения, или на основе уже известного им перекрёстного правила, проверяя, равны ли соответствующие произведения).

Знание основного свойства пропорции полезно для решения часто встречающейся задачи на нахождение неизвестного члена пропорции. Подчеркнём, что мы не считаем необходимым для всех учащихся владение «свёрнутым» алгоритмом нахождения неизвестного члена пропорции (например: неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних её членов, делённому на известный крайний). Такая задача, естественно, решается в два этапа (см. пример 1 в объяснительном тексте), что позволяет не перегружать память учащихся необязательными правилами.

В то же время в качестве упражнения и обобщения «свёрнутый» алгоритм также может быть рассмотрен (см. упражнение **179**).

В этом же пункте рассматривается решение задач на прямую и обратную пропорциональности новым способом — с помощью пропорций. Полезно, чтобы учащиеся по условию одной и той же задачи составляли разные пропорции, объясняя смысл записанных отношений (см. пример 2).

В классах с невысоким уровнем подготовки, кроме задач раздела **А**, рекомендуем выполнить практическую работу, составляющую содержание упражнения **190**, а также упражнение **191**, которое можно расценивать как содержательную подготовку к изучению темы «Подобие» в курсе геометрии. При работе с сильными учащимися рекомендуем обратить внимание на группу задач, в которых рассматриваются некоторые дополнительные теоретические аспекты данного вопроса (см. упражнения **187, 188,** а также задачу-исследование **197**).

Комментарий к упражнениям

182. а) По условию $\dfrac{\text{расстояние на карте}}{\text{расстояние в действительности}} = \dfrac{1}{5\,000\,000}$. Пусть x — расстояние в действительности (в см). Тогда $\dfrac{9}{x} = \dfrac{1}{5\,000\,000}$, $x = 45\,000\,000$ (см). О т в е т: расстояние между Москвой и Курском равно 450 км.

б) Для вычисления расстояния между Москвой и Ригой на той же карте можно также составить пропорцию. Но можно рассуждать иначе, опираясь на результат предыдущего задания: 900 км больше 450 км в два раза, поэтому и искомое расстояние на карте будет длиннее расстояния, соответствующего 450 км, в 2 раза, т. е. оно равно $9 \cdot 2 = 18$ км.

184. а) Обозначим через x часть стакана, которая заполнится, если в него насыпать 11 ложек, и кратко запишем условие задачи:

8 ст. л. — $\frac{2}{3}$ стакана,

11 ст. л. — x стакана.

Количество столовых ложек прямо пропорционально заполненной части стакана: во сколько раз увеличится количество ложек, во столько же раз увеличится заполненная часть. Имеем пропорцию: $\frac{8}{11}=\frac{\frac{2}{3}}{x}$.

Из пропорции находим, что $x=\frac{11}{12}$. Итак, если в стакан насыпать 11 столовых ложек сахара, то заполнится $\frac{11}{12}$ стакана. О т в е т: не хватит.

187. а) 4 · 8 = 2 · 16. Значит, 4 и 8 могут быть одновременно либо средними членами пропорции, либо крайними.

Пусть 4 и 8 — средние члены, тогда возможны варианты:

$\frac{2}{4}=\frac{8}{16}$; $\frac{2}{8}=\frac{4}{16}$; $\frac{16}{4}=\frac{8}{2}$; $\frac{16}{8}=\frac{4}{2}$.

Пусть 4 и 8 — крайние члены. Получим ещё четыре варианта:

$\frac{4}{2}=\frac{16}{8}$; $\frac{8}{2}=\frac{16}{4}$; $\frac{4}{16}=\frac{2}{8}$; $\frac{8}{16}=\frac{2}{4}$.

Однако эти четыре пропорции могут быть получены из предыдущей четверки перестановкой левой и правой частей. Поэтому всего имеем четыре различные пропорции.

188. а) Обозначим искомое число через x. Возможны три случая:

$$20\cdot 5=7\cdot x;\ 20\cdot 7=5\cdot x;\ 20\cdot x=5\cdot 7.$$

Таким образом, таких чисел три: $14\frac{2}{7}$, 28 и 1,75. Полезно в каждом случае записать какую-нибудь пропорцию.

192. а) 50 км/ч — 12 мин,

x км/ч — 10 мин.

Здесь x км/ч — новая скорость электропоезда. Имеем пропорцию: $\frac{50}{x} = \frac{10}{12}$, откуда x = 60. Ответ: на 10 км/ч.

Обсудить вопрос: почему время, данное в минутах, мы не стали выражать в часах, хотя скорость дана в километрах в час?

193. Указание: количество шерсти прямо пропорционально площади шарфа.

194. Четверть расстояния (25%) останется проехать после того, как автомобиль уже проехал 75% пути. Краткое условие выглядит так:

2,4 ч — 40% пути,

x ч — 75% пути.

Чем больше пройденное расстояние, тем больше времени потребовалось автомобилю на его преодоление. Получаем пропорцию: $\frac{2,4}{x} = \frac{40}{75}$. Отсюда $x = \frac{2,4 \cdot 75}{40} = 4,5$.

Разница во времени составляет 4,5 – 2,4 = 2,1 (ч).

196. б) Если расстояние постоянно, то скорости пешеходов обратно пропорциональны времени, которое они тратят на его прохождение, т. е. скорость первого относится к скорости второго как 3 : 2. Обозначим через x расстояние, которое прошёл второй пешеход, вышедший из пункта B, до встречи. Так как время движения пешеходов до встречи одно и то же, то расстояния, пройденные ими, пропорциональны их скоростям. Имеем пропорцию: $\frac{3,6}{x} = \frac{3}{2}$, $x = 2,4$. Расстояние между пунктами A и B равно 3,6 + 2,4 = 6 (км).

197. б) Так как равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — пропорция, то $ad = bc$.

Меняем местами крайние члены: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. Так как $ad = bc$, то по перекрёстному правилу отношения $\frac{d}{b}$ и $\frac{c}{a}$ равны, и это равенство — пропорция, и т. д. Таким образом, если в пропорции поменять местами крайние или средние члены или заменить каждое отношение обратным, то опять получится пропорция.

в) Поменяем местами в пропорции a : 1,2 = b : 1,5 средние члены. Получим пропорцию a : b = 1,2 : 1,5. Отсюда $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$.

2.4. Пропорциональное деление

Методический комментарий

Учащиеся имеют хорошую базу для изучения материала этого пункта. Во-первых, начиная с 5 класса, они решают задачи на части, а именно, к подобной задаче сводится решение задачи на пропорциональное деление. Далее, в курсе 6 класса в связи с введением понятия отношения рассматривался вопрос о делении величины в данном отношении. Теперь, по сути, мы возвращаемся к этому же вопросу, но в более широкой его постановке.

В качестве вводного примера в пункте рассматривается задача о делении пропорционально вложенным средствам прибыли, полученной фирмами. В связи с этим можно сообщить учащимся, что пропорциональное деление с древних времён использовалось для распределения денег — когда надо было делить завещанный капитал между наследниками, когда вставал вопрос о дележе заработка и т. д. Но и сейчас пропорциональное деление используется в самых разных ситуациях; с некоторыми из них учащиеся познакомятся, решая задачи.

Обращаем внимание на задачу **200** (б), содержащую буквенные данные. Здесь предлагается, решив задачу на пропорциональное деление в общем виде, записать общее правило решения таких задач, а делается это по аналогии с решением задачи **200** (а). Такая работа полезна с точки зрения формирования умения выполнять обобщения.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться разбором примеров в объяснительном тексте и решением задач раздела **А**. В них отражены все существенные моменты данного вопроса. Все задачи раздела **Б** довольно трудные.

Комментарий к упражнениям

204. 1) О т в е т: а) 30 собак; б) 45 собак; в) 60 собак.

2) О т в е т: а) $3x$, б) $2y$.

205. Если массу семян в первом пакете принять за 1 часть, то масса семян во втором пакете составит 2 части, в третьем — 4 части. Следовательно, 350 г семян распределены в отношении 1 : 2 : 4.

1) 1 + 2 + 4 = 7 (частей) — приходятся на 350 г;

2) 350 : 7 = 50 (г) — семян приходится на 1 часть;

3) 50 · 2 + 100 (г) — семян во втором пакете;

4) 50 · 4 = 200 (г) — семян в третьем пакете.

О т в е т: 50 г, 100 г, 200 г.

206. Заметим, что достоинства купюр определяют отношение стоимости газонокосилок следующим образом: 1000 : 500 : 100, а поэтому сократив это отношением, имеем 10 : 5 : 1.

207. Прежде всего надо найти число акций, которыми владеют фирмы *A*, *B* и *C*. Из условия ясно, что 25% всех акций предприятия составляют 350 000 акций, тогда 75% — в 3 раза больше, т. е. фирмам принадлежит 1 050 000 акций. Распределив 1 050 000 акций в отношении 4 : 12 : 9, получим соответственно 168 000, 504 000, 378 000 акций.

208—209. В каждой из этих задач даны два отношения, и их нужно преобразовать так, чтобы можно было записать одно отношение. При этом пользуемся следующим свойством отношения: отношение не изменится, если оба его члена умножить или разделить на одно и то же число.

208. Имеем отношения 3 : 5 и 2 : 3. Так как наименьшее общее кратное чисел 5 и 2 равно 10, то заменяем их такими: 3 : 5 = 6 : 10 и 2 : 3 = 10 : 15. Значит, $AB : BC : AC = 6 : 10 : 15$.

209. По условию имеем: отношение первой суммы ко второй равно $1 : \frac{2}{3}$, или, иначе, 3 : 2, отношение второй суммы к первой равно $1\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$, или, иначе, 20 : 12. Заменим отношение 3 : 2 равным ему отношением 30 : 20. Тогда призы на сумму 12 400 р. разделены в отношении 30 : 20 : 12, или иначе, 15 : 10 : 6.

2.5. Задачи на «сложные» пропорции

(*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

Все предлагаемые задачи — на пропорциональную зависимость величин. Их можно решать по действиям, каждый раз получая конкретный числовой результат. Но учащимся предлагается более удобный и эффективный приём, суть которого состоит в том, что «выражение — ответ» конструируется в процессе цепочки логических рассуждений. Задачи несложные и предлагаемый приём решения интересен школьникам. При наличии времени две-три задачи можно разобрать со всем классом.

Комментарий к упражнениям

210. Запишем кратко условие задачи:

5 лошадей — 30 дней — 1000 кг,

10 лошадей — x дней — 200 кг.

Рассуждаем: 1000 кг овса 5 лошадей съедят за 30 дней;

200 кг овса 5 лошадей съедят в 5 раз быстрее, т. е. за 6 дней.

200 кг овса 10 лошадей съедят в 2 раза быстрее, т. е. за 3 дня.

211. Запишем кратко условие задачи:

3 строителя 8 ч — 4 м — производительность 100%,

4 строителя — x ч — 10 м — производительность 120%.

Рассуждаем: 3 строителя выложили 4 м за 8 ч,

3 строителя будут выкладывать 10 м в $\frac{10}{4}$ раза дольше, т. е. за $\frac{8 \cdot 10}{4}$ ч,

4 строителя при той же производительности выложат 10 м быстрее в $\frac{4}{3}$ раза, т. е. за $\frac{8 \cdot 10 \cdot 3}{4 \cdot 4}$ ч.

Теперь учтём, что производительность труда бригады увеличилась в $\frac{120}{100}$ раз. Поэтому время необходимо уменьшить во столько же раз:

$$\frac{8 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 100}{4 \cdot 4 \cdot 120} = 12{,}5 \text{ (ч).}$$

212. а) 15 чел. — 20 дней — 300 бут.;

20 чел. — 30 дней — x бут.

Кратко решение можно записать так:

15 чел. — 20 дней — 300 бут.

15 чел. — 30 дней — $\frac{300 \cdot 30}{20}$ бут.

20 чел. — 30 дней — $\frac{300 \cdot 30 \cdot 20}{20 \cdot 15} = 600$ бут.

600 – 300 = 300 (бут.)

О т в е т: на 300 бутылок воды.

213. 3 оператора — 6 ч. в день — 4 дня — 700 с.,

x операторов — 2 ч в день — 2 дня — 350 с.

Возможна такая запись решения:

6 ч в день — 4 дня — 700 с — оператора,

6 ч в день — 4 дня — 350 с. — $\frac{3 \cdot 350}{700}$ операторов,

6 ч в день — 2 дня — 350 с. — $\frac{3 \cdot 350 \cdot 4}{700 \cdot 2}$ операторов,

2 ч в день — 2 дня — 350 с. — $\frac{3 \cdot 350 \cdot 4 \cdot 6}{700 \cdot 2 \cdot 2}$ операторов.

Итак, понадобится 9 операторов. 9 – 3 = 6 (человек) — на столько необходимо увеличить команду операторов.

Дополнительные задания

Указания и решения

222. Обозначим через x (ч) — время заполнения бассейна водой при одновременном включении 6 кранов. Зная, что время обратно пропорционально числу кранов, составим пропорцию: $\frac{3}{4} : x = 6 : 4$. Получим: $x = 0{,}5$. Ответ: 30 мин.

223. Обозначив расстояние через x (км), запишем кратко условие:

80 км — 5,6 л,

x км — 40 л

Так как речь идет о прямо пропорциональных величинах, то имеем пропорцию: $80 : x = 5{,}6 : 40$. Решив пропорцию, получим $x = 571{,}42\ldots$ Округлим ответ до десятков: 570 км.

227. Все тетради надо распределить в отношении 6 : 8 : 7. Всего имеется 21 часть и на каждую часть приходится 588 : 21 = 28 (тетрадей). Поэтому 1А класс получит 28 · 6 = 168, 1Б класс получит 28 · 8 = 224, 1В — 28 · 7 = 196 (тетрадей).

228. Всего имеется 3 + 5 + 4 + 2 = 14 (равных частей), а поэтому на каждую часть приходится 0,5 см. Длина отрезка *AP* больше длины отрезка *KB* на одну такую часть, т. е. на 0,5 см.

Глава 3. Введение в алгебру (9 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
3.1 Буквенная запись свойств действий над числами 3.2. Преобразование буквенных выражений	3	О-14, О-15, П-27—П-30	61—66
3.3. Раскрытие скобок 3.4. Приведение подобных слагаемых	4	О-16, О17, «*Проверь себя*», П-31—П-35	67—72 73—78
Обзор и контроль	2		

Основные цели: сформировать у учащихся первоначальные представления о преобразовании буквенных выражений и научить выполнять элементарные базовые преобразования.

Обзор главы. В этой главе учащиеся приступают к изучению алгебры, начало которого согласно общей концепции курса отнесено к 7 классу. Остановимся на идейной стороне принятого в учебнике подхода к введению в алгебру. Кратко её можно выразить так: «от чисел к буквам».

К этому моменту учащиеся уже накопили большой опыт арифметических вычислений, причём значительное внимание уделялось использованию специальных приёмов, направленных на преобразование данного выражения в другое, имеющее то же значение, но более удобное для проведения подсчётов. Примеры таких приёмов рассматриваются в п. 3.1. Очевидно, что рассматриваемые преобразования числовых выражений можно применить к любым числам, т. е. они носят общий характер. В силу своей общности они являются свойствами арифметических действий и могут быть записаны с помощью букв.

В следующем пункте совершается переход *к преобразованию буквенных* (т. е. алгебраических) *выражений*. Преобразование выражения — это замена его другим, которое, по определению, считается равным исходному.

Правила преобразований буквенных выражений основаны на законах алгебры, которые «заимствованы» из арифметики:

$$a + b = b + a,\ \ a \cdot 1 = a,\ \ a + 0 = a,$$

$$a(b + a) = ab + ac,\ \ a(-b) = -ab,\ \ (-a)(-b) = ab \text{ и т. д.}$$

Учащиеся прежде всего осваивают правила преобразования двух основных видов алгебраических выражений — сумм и произведений, в записи которых содержатся буквы. Завершается глава рассмотрением правила приведения подобных слагаемых в суммах, а также правилами раскрытия скобок в алгебраической сумме и в произведении. Рассмотренные сведения становятся теоретической базой для изучения в дальнейшем вопроса о преобразовании целых выражений.

Основные виды деятельности. Применять язык алгебры при выполнении элементарных знаково-символических действий: использовать буквы для обозначения чисел, для записи общих утверждений; моделировать буквенными выражениями условия, описанные словесно, рисунком или чертежом; преобразовывать алгебраические суммы и произведения (выполнять приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок, упрощение произведений). Выполнять числовые подстановки в буквенное выражение, вычислять числовое значение буквенного выражения.

Комментарий к использованию ЭИ. Работа с ЭИ позволяет отработать в интерактивном режиме навыки составления буквенных выражений и выполнения числовых подстановок, простейших преобразований буквенных выражений, которые носят базовый характер.

Материалы пп. 1.1 «Буквенные выражения» и 1.2 «Числовое значение буквенного выражения» включают упражнения, которые существенно обогащают и делают более целенаправленной традиционную систему заданий, используемую при формировании соответствующих навыков. Буквенные выражения рассматриваются в разных содержательных контекстах: для ответов на вопросы сюжетных задач (задания 3—7), для построения фигур, имеющих заданную площадь (задание 2). Последний из перечисленных фрагментов может быть охарактеризован как «геометрическая алгебра». Для него разработан специальный инструментарий, который используется и в следующих пунктах.

Задания на вычисление числового значения буквенного выражения даются с выбором ответа (задания 1, 3, 7), в виде блок-схем и таблиц (задания 2, 4—6 из п. 1.2). Такая формулировка позволяет увеличить объём тренировочных упражнений, а сами по себе упражнения чрезвычайно полезны с точки зрения развития навыков устных вычислений. Упражнения 9—10 из п. 1.2 по своей сути являются короткими математическими исследованиями, в ходе которых происходит осмысление того, как меняется значение буквенного выражения в зависимости от изменения значения переменной.

Материалы пп. 1.4 «Преобразование буквенных выражений» и 1.5 «Раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых» служат цели формирования базовых умений, без прочного овладения которыми невозможно дальнейшее изучение алгебры. Обращаем внимание учителя на задания 1 и 2. Их цель — формирование понятия тождественно равных выражений. При этом используется нестандартный приём: соотнесение набора выражений с геометрической фигурой, площадь которой может быть найдена разными способами. После этого рассматриваются простейшие преобразования сумм и произведений, выполняемые на основе свойств арифметических действий (задания 3—9). Упражнения 11 и 12 — это «взгляд в будущее». По сути учащиеся должны выполнить преобразование таких выражений, как $(a + b)(c + d)$ и $(a + b)^2$, исходя из содержательных соображений. Пункт 1.5 естественно разбивается на три фрагмента: первый служит поддержке умений раскрывать скобки (задания 1—6), второй — приводить подобные слагаемые (задания 7—10), третий — сочетать раскрытие скобок с приведением подобных слагаемых (задания 11—15).

<table>
<tr><th colspan="2">Учебник</th><th colspan="3">ЭИ</th></tr>
<tr><th>Глава</th><th>Пункт</th><th>Раздел</th><th>Тема</th><th>Пункт</th></tr>
<tr><td rowspan="3">3. Введение в алгебру</td><td>3.1. Буквенная запись свойств действий над числами</td><td rowspan="4">Алгебра, 7—9</td><td rowspan="4">1. Введение в алгебру</td><td>1.1. Буквенные выражения
1.2. Числовое значение буквенного выражения</td></tr>
<tr><td>3.2. Преобразование буквенных выражений</td><td>1.4. Преобразования буквенных выражений</td></tr>
<tr><td>3.3. Раскрытие скобок</td><td>1.5. Раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых, задания 1—6</td></tr>
<tr><td></td><td>3.4. Приведение подобных слагаемых</td><td>1.5. Раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых, задания 7—16</td></tr>
</table>

3.1. Буквенная запись свойств действий над числами

Методический комментарий

Этот пункт имеет прежде всего теоретическое значение; он подготавливает учащихся к осознанному восприятию такого фундаментального понятия, как *преобразование буквенного выражения*.

Приёмы вычислений, рассмотренные в тексте в качестве примеров, даны не для отработки навыков. Их назначение состоит в том, чтобы учащиеся в каждом случае могли осознать, на основе каких действий одно числовое выражение заменяется другим, равным ему, и записать этот переход с помощью букв, в виде буквенного равенства. Соответствующие буквенные равенства в силу своей общности выражают свойства арифметических действий. Важно довести до сознания учащихся, что арифметические действия обладают многими свойствами, которые мы описываем с помощью буквенных равенств; при этом нужно особо подчеркнуть, что в левой и правой частях этих равенств всегда получается одно и то же число — каков бы ни был набор чисел, подставляемых вместо используемых в записи этого равенства букв.

Так как содержание пункта носит прежде всего идейный характер и отработка навыков при его изучении не предполагается, то и задерживаться на нём не следует. В то же время и пренебрегать содержащимися в нём упражнениями никак нельзя — ведь ими закладывается основа для понимания, осознанного восприятия последующего материала, а это чрезвычайно важно.

При выполнении таких упражнений, как **229**, **230**, **236**, **242**, **243**, учащиеся должны будут записывать в буквенном виде применяемые приёмы преобразования выражений подобно тому, как это сделано в примерах в объяснительном тексте. Упражнения геометрического содержания **231, 233**, **240**, **241** «материализуют», делают наглядной идею равенства буквенных выражений. Упражнения **234** и **235** позволяют вспомнить свойства арифметических действий, которые будут использоваться для преобразования выражений при изучении следующего пункта.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем обратить внимание на упражнения **229—235**, **237**, **238**, **240**, **241**.

Комментарий к упражнениям

Упражнения **229, 230** взаимосвязаны. Их надо выполнять на уроке.

229. Запись и рассуждения выполняются по аналогии с примером 1 учебника.

а) $256 + 98 = \boxed{256 + (100 - 2) = 256 + 100 - 2} = 356 - 2 = 354$,

$a + (b - c) = a + b - c$;

б) $138 + 106 = \boxed{138 + (100 + 6) = 138 + 100 + 6} = 238 + 6 = 246$,

$a + (b + c) = a + b + c$;

в) $87 - 49 = \boxed{87 - (50 - 1) = 87 - 50 + 1} = 37 + 1 = 38$,

$a - (b - c) = a - b + c$;

г) $94 - 61 = \boxed{94 - (60 + 1) = 94 - 60 - 1} = 34 - 1 = 33$,

$a - (b + c) = a - b - c$.

230. а) $x - (y - z)$ — из числа x надо вычесть разность чисел y и z. Соответствующее правило записано в примере 229 в). Имеем: $x - (y - z) = x - y + z$ — нужно вычесть первое число и прибавить второе.

231. б) $(b - c)d$ и $bd - cd$, имеем равенство: $(b - c)d = bd - cd$ — это площадь одного и того же прямоугольника.

232. Способ 1. Всего продали $a + b + c$ пакетов, в каждом из них x г орехов, поэтому общая масса орехов (в граммах) равна $x(a + b + c)$.

Способ 2. Масса пакетов (в граммах) с грецкими орехами равна xa, с арахисом — xb, с фундуком — xc, поэтому их общая масса равна $xa + xb + xc$.

Имеем равенство: $x(a + b + c) = xa + xb + xc$.

234. Полезно каждое свойство не только записать в символическом виде, но и сформулировать.

а) $a \cdot 0 = 0$; б) $a \cdot (-1) = -a$ (при умножении числа на –1 получается противоположное число);

в) $a \cdot 1 = a$; г) $a + 0 = a$.

236. Сначала рассмотреть числовые примеры $120 \cdot 1{,}5$; $648 \cdot 1{,}5$.

237. а) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ — *правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями*;

б) $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ — *правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями*;

в) $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$ — *правило умножения дроби на целое число*;

г) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ — *правило деления дроби на дробь*.

238. Начать с числовых примеров (как в упражнении 237).

239. Начать с числового примера:

$$5\frac{2}{3}=5+\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3+2}{3}=\frac{17}{3}.$$

В буквенном виде:

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

240. $b(a + c) – c(b – d) = ab + cd$.

241. Например, $(x + y)(c + b) = c(x + y) + b(x + y) = x(c + b) + y(c + b) = cx + cy + bx + by$.

243. Сначала разобрать пример 2 учебника.

244. Возьмем числа a, b, c и d. Перемножать непосредственно можно только два числа, например, так:

$(ab)(cd) = (ac)(bd) = ((ab)c)d = ((ac)d)b = \ldots$.

Эта идея получает развитие в рубрике «*Для тех, кому интересно*» (упражнение **323**).

3.2. Преобразование буквенных выражений

Методический комментарий

При изучении этого пункта учащиеся приступают к овладению основами буквенного исчисления. Напомним, что при работе по данной системе учебников в 5—6 классах этот вопрос не затрагивался. Излагаемый материал чрезвычайно важен. Здесь формируются элементарные базовые умения, без прочного овладения которыми невозможно дальнейшее изучение алгебры.

Основная теоретическая идея такова: в алгебре замена одного буквенного выражения другим, т. е. преобразование буквенного выражения, выполняется на основе специальных законов; такими алгебраическими законами теперь становятся хорошо известные учащимся свойства арифметических действий. Преобразуя выражение по этим правилам, мы получаем выражение, *тождественно равное* исходному. Это название подчёркивает, что при подстановке в эти выражения вместо букв *любых* конкретных чисел они принимают равные значения. В дальнейшем такие выражения предлагается называть просто *равными*; подчеркнём, что этот термин вполне «законен» — эти выражения *алгебраически* равны. И при этом употребляемая терминология становится проще. Для учителя заметим, что если свойства арифметических действий формулируются с «кванторной приставкой» (например, для *любых чисел* a и b $a + b = b + a$), то законы алгебры этого не требуют.

Материал пункта разбивается на два основных логических фрагмента, связанных с преобразованием сумм и произведений. В каждом из них вводятся новые понятия и термины, разъясняются приёмы преобразований и принятые способы записи выражений (т. е. некоторые правила математического синтаксиса). Обобщённые законы преобразования сумм и произведений, размещённые на страницах учебника на цветном фоне, знакомы ученикам с 5 класса. Теперь при выполнении упражнений их следует многократно проговаривать. Первичное закрепление приёмов преобразования сумм и произведений на основе указанных законов рекомендуем проводить на таких простых выражениях, как $a + c + 8$, $x + 6 +$ $+ y + 4$, $(a + c) + (b + 10)$, xyz, $a \cdot 3 \cdot c$ и т. д.

На усвоение нового для учащихся понятия алгебраической суммы направлены упражнения **245—248**. Изменение порядка слагаемых в алгебраической сумме представляет для учащихся некоторую трудность, поэтому мы рекомендуем обратить внимание на образное выражение, использованное в учебнике: «В *алгебраической сумме слагаемые «путешествуют» вместе со своими знаками».* Его можно взять на вооружение в качестве неформального правила при выполнении заданий типа **249** и **250**.

Выработке навыка упрощения алгебраических сумм способствуют такие упражнения, как **251**—**255**. Обратите прежде всего внимание на упражнения **251**—**253**; их назначение — обучить замене суммы одинаковых слагаемых произведением. Перед выполнением заданий **254** и **255** нужно разобрать пример 1 из учебника; при этом акцент нужно сделать на краткую запись, сопровождающуюся устными пояснениями.

На выработку навыков преобразования произведений направлены упражнения **256**—**261**; соответствующие образцы даны в примерах 2 и 3 учебника. Следует сделать акцент на двух моментах, а именно, на правилах записи коэффициента произведения (см. комментарий к примеру 2), а также на целесообразность начинать преобразование с определения знака результата.

Отдельное место занимают упражнения **262** и **263** (на сокращение дробей). Этот вид заданий включается в систему упражнений в разных темах курса, что способствует постепенному формированию навыка. Однако надо помнить, что основательное изучение алгебраических дробей отнесено к 8 классу.

В разделе **Б** предлагаются некоторые новые идеи. В заданиях **264**—**267** преобразования выступают как средство для ответа на поставленный вопрос. В упражнении **268** предлагается выполнить более сложные в техническом отношении преобразования. Нужно помнить, что при работе со степенями учащиеся пока должны опираться только на определения степени (образец рассуждений см. в упражнении **263**). Это полезная содержательная работа, облегчающая этап овладения формальным аппаратом преобразования выражений, содержащих степени. Цель упражнений **269**—**270** — постепенное «внедрение» в сознание учащихся идеи подстановки.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем выполнить задания **245**—**261**, **262** (*а*—*д*), **263**, **267** (*а*), **269**, **270**.

Комментарий к упражнениям

248. Немного усложненный вариант предыдущего упражнения.

ж) $a - c - (-b) - (-d) = a - c + (+b) + (+d) = a - c + b + d$;

з) $a - (-x) + (-y) - (-c) = a + (+x) + (-y) + (+c) = a + x - y + c$.

252. Вспомнить, как сумму одинаковых слагаемых можно записать в виде произведения. Например, $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4$. Точно так же $x + x = x \cdot 2 = 2x$, $a + a + a = a \cdot 3 = 3a$. Затем перейти к отысканию периметров данных фигур.

255. Образец подробного рассуждения дан в примере 1. Его надо разобрать перед выполнением упражнения. Здесь уже можно ограничиться краткой записью решения.

256. Сначала разобрать пример 2.

В упражнениях **259**—**260** сначала следует решать вопрос о знаках (см. пример 3).

259. з) $4c \cdot (-2c) \cdot (-b) \cdot (-b) = -4c \cdot 2c \cdot b \cdot b = -8b^2c^2$.

262. Прежде чем выполнять это задание, рекомендуем рассмотреть числовой пример.

а) Сократим сначала дробь $\frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 11}$. Имеем: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 11}$. Заменив некоторые числа в этой дроби буквами, получим $\frac{4xy}{5yz}$. Сократим эту дробь: $\frac{4xy}{5yz} = \frac{4x}{5z}$.

е) $\frac{2\cdot 5^2}{3\cdot 5}=\frac{2\cdot 5\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{2\cdot 5}{3}$. Аналогично получаем: $\frac{2x^2}{3x}=\frac{2\cdot x\cdot x}{3\cdot x}=\frac{2x}{3}$.

264. Выражение сначала нужно упростить. Например, $k + k + k + k + k = 5k$ — это произведение двух нечётных чисел 5 и k; оно не делится на 2;

$k + k + k + k + 10 = 4k + 10$ — каждое слагаемое этой суммы делится на 2, значит, и сумма делится на 2.

266. Имеем: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) + (n + 7) + (n + 8) + (n + 9) + (n + 10) + (n + 11) + (n + 12) + (n + 13) + (n + 14) = 15n + (1 + 2 + \ldots + 13 + 14)$.

Сумму чисел от 1 до 14 можно найти непосредственно сложением или уже известным учащимся «методом Гаусса».

Ответ. $15n + 105$.

268—271. При преобразовании выражений, содержащих степени, учащиеся пользуются только определением степени, так как свойства степени пока не рассматриваются. Поэтому степень каждый раз надо записывать в виде произведения.

268. в) $a(-ac)^2 = a(-ac)(-ac) = aacac = a^3c^2$;

д) $-z(-x^2)(-xz) = -zxxxz = -x^3z^2$.

270. $2 \cdot (-y) = -2y$; $2(-y)^2 = 2 \cdot (-y) \cdot (-y) = 2y^2$;

$2(-y)^3 = 2 \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y) = -2 \cdot y \cdot y \cdot y = -2y^3$;

$(-y)^2 + 2(-y)^3 = (-y)\cdot(-y) + 2 \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y) = y \cdot y + (-2 \cdot y \cdot y \cdot y) = y^2 - 2y^3$.

271. Учащиеся предложат разные ответы. Нужно подчеркнуть, что это равные выражения, так как каждое из них указывает способ нахождения площади одной и той же фигуры. Доказывать равенство этих выражений путём преобразований не следует.

3.3. Раскрытие скобок

Методический комментарий

Для осознанного восприятия содержания пункта важно связать его с предыдущим материалом. Это можно сделать, например, сказав следующее: «Вам уже известны правила преобразования сумм и произведений. Теперь вы узнаете правила преобразования выражений, которые записаны с помощью скобок. Используя эти правила, выражение со скобками всегда можно заменить равным ему выражением, не содержащим скобок».

Следует также иметь в виду, что учащиеся часто не понимают смысла требования «раскрыть скобки». Поэтому на первых порах нужно добавлять: «Это значит, что данное выражение надо преобразовать в выражение без скобок».

В классах с невысоким уровнем подготовки при наличии времени, помимо упражнений из раздела **А**, советуем разобрать также упражнения **285**—**287**. Упражнения **291**—**293** (как и все задачи на делимость) советуем рассмотреть только с сильными учащимися.

Комментарий к упражнениям

285. Можно предложить и в слабом классе. Если предложено неверное решение, то ученик должен убедиться в этом, раскрыв скобки в составленном выражении.

а) $x - (x - x) = x$; б) $x - (y - y - x) = 2x$.

288. а) $a - (b - (c + 4)) = a - (b - c - 4) = a - b + c + 4$;

в) $a - (a - (a - 10)) = a - (a - a + 10) = a - 10$.

289. 1) $b(a - c) + c(b - d)$; 2) $ab - cd$;

$b(a - c) + c(b - d) = ba - bc + cb - cd = ab - cd$.

290. Положим, что v км/ч — собственная скорость лодки, m км/ч — скорость течения реки.

Тогда (v + m) км/ч — скорость лодки по течению, а (v – m) км/ч — скорость лодки против течения.

а) Найдём разность скоростей лодки по течению и против течения:

$$(v + m) - (v - m) = v + m - v + m = 2m.$$

б) Найдём полусумму скоростей по течению и против течения:

$$\frac{(v+m)+(v-m)}{2} = \frac{2v}{2} = v.$$

291. Дано: $n + (n + 1) + (n + 2) = N$, т. е. $3n + 3 = N$. Выразим через N сумму $(n + 3) + (n + 4) + (n + 5)$. Имеем:

$$(n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 3n + 12 = (3n + 3) + 9 = N + 9.$$

292. $2n + (2n + 2) + (2n + 4) = 6n + 6 = A$.

а) $(2n + 6) + (2n + 8) + (2n + 10) = 6n + 24 = (6n + 6) + 18 =$ $= 18 + A$;

б) $(2n + 5) + (2n + 7) + (2n + 9) = 6n + 21 = A + 15$.

293. Здесь используются известные свойства делимости: *если все слагаемые делятся на некоторое число, то и сумма делится на это число; если одно из слагаемых не делится на некоторое число, а остальные — делятся, то сумма на это число не делится.*

а) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$ — делится на 3;

б) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$ — не делится на 4;

в) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10$ — делится на 5;

г) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 6n + 15$ — не делится на 6.

Возникает гипотеза: если количество слагаемых нечётное, то сумма делится на их число; если же количество слагаемых чётное, то сумма не делится на их число. Чтобы подкрепить эту гипотезу, можно найти сумму семи и восьми слагаемых:

$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) =$
$= 7n + 21;$

$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) +$
$+ (n + 7) = 8n + 28.$

Обратите внимание учащихся на то, что каждый следующий результат можно получать, используя предыдущий.

3.4. Приведение подобных слагаемых

Методический комментарий

Основная цель, которая должна быть достигнута при изучении материала этого пункта, — научить учащихся выполнять приведение подобных слагаемых с помощью сформулированного в учебнике правила. Назначение развёрнутого решения со ссылкой на распределительное свойство (пример 1 учебника) состоит в том, чтобы осознанно прийти к указанному правилу. Поэтому практиковать развёрнутое решение не следует; достаточно разобрать один-два таких примера, а далее нужно использовать сформулированное правило.

Часть упражнений к пункту сочетают два важнейших умения: раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых (упражнения **301**—**303**).

В классах с невысоким уровнем подготовки кроме упражнений из раздела **А** рекомендуем разобрать ещё и задание **309**.

Комментарий к упражнениям

309. О т в е т.

$7a + 5b – 3a + b + 4b – 4a = 10b;$

$7a – 5b +3a + b + 4b – 4a = 6a$, или иначе, $7a + 5b + 3a – b – 4b – 4a = 6a$.

311. а) $(2k – a) – (k – a) = k$;

б) $2(k – a) – (k – a) = k – a$;

в) $(ab + 1) - (ab + 1) = 0$;

г) $ab + (1 - a)b + 1 = b + 1$.

313. Январь — n р.;

Февраль — $1{,}1n$ р., так как $n + 0{,}1n = 1{,}1n$;

Март — $1{,}1n \cdot 1{,}2 = 1{,}32n$ (р.)

Всего — $n + 1{,}1n + 1{,}32n = 3{,}42n$ (р.)

314. Площадь нового сквера равна $1{,}5a \cdot 0{,}8b = 1{,}2ab$. Она увеличилась в 1,2 раза, т. е. на 20%.

316. Пусть собственная скорость лодки равна v км/ч, а скорость течения реки равна m км/ч и лодка двигалась t ч по течению и t ч против течения. Тогда всего она проплыла

$$(v + m)t + (v - m)t = 2vt \text{ (км)}.$$

Чтобы проплыть расстояние, равное $2vt$ км, со скоростью v км/ч, ей потребуется $\frac{2vt}{v} = 2t$ ч, т. е. столько же, сколько она всего затратила на путь по течению и против течения.

3.5. Ещё раз о законах алгебры

(*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

Здесь даны два самостоятельных фрагмента. В первом предлагаются различные содержательные интерпретации буквенных равенств; таким образом, он является продолжением и развитием идей, изложенных в п. 3.1. Это интересный, неформальный и несложный материал, который может оказаться доступным многим учащимся.

Во втором фрагменте фактически приведён список аксиом алгебры и проведены строгие доказательства некоторых равенств. Этот материал характерен для углубленного изучения математики, его целесообразно рассматривать только с сильными учащимися.

Комментарий к упражнениям

321. $x \cdot \dfrac{y}{x} = y$. Это верное равенство.

В самом деле, $x \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{1} \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{x \cdot y}{x} = y$.

322. $(x + y) - (z + t) = (x - z) + (y - t)$ — верно. Чтобы убедиться в этом, достаточно преобразовать левую и правую части равенства.

323. 1) $(xy)(zt)$; $((xy)z)t$; $x(y(zt))$; $(x(yz))t$; $x((yz)t)$. Всего 5 вариантов.

324. 1) $(2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5) = ((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot 5)) =$ $= (2 \cdot (3 \cdot 4)) \cdot 5 = 2 \cdot ((3 \cdot 4) \cdot 5) = 120$;

2) $(2 : 3) : (4 : 5) = \dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \dfrac{5}{6}$;

$((2 : 3) : 4) : 5 = \left(\dfrac{2}{3 \cdot 4}\right) : 5 = \dfrac{1}{6 \cdot 5} = \dfrac{1}{30}$;

$2 : (3 : (4 : 5)) = 2 : \left(3 : \dfrac{4}{5}\right) = 2 : \dfrac{3 \cdot 5}{4} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$;

$(2 : (3 : 4)) : 5 = \left(2 : \dfrac{3}{4}\right) : 5 = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$;

$2 : ((3 : 4) : 5) = 2 : \left(\dfrac{3}{4} : 5\right) = 2 : \dfrac{3}{4 \cdot 5} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 5}{3} = \dfrac{40}{3}$.

Вывод. Значение выражения, содержащего операцию деления, зависит от того, как расставлены скобки. А в произведении при любой расстановке скобок получается один и тот же результат.

325. См. пример 6 учебника.

Дополнительные задания

Указания и решения

329. б) Представим число, записанное четырьмя одинаковыми цифрами, в виде суммы разрядных слагаемых: $a{\cdot}1000 + a{\cdot}100 + a{\cdot}10 + a{\cdot}1$, где a — натуральное число.

Выполнив преобразования, получим произведение $1111{\cdot}\ a$, или, иначе, $11{\cdot}101{\cdot}a$. Отсюда ясно, что данное число делится и на 11, и на 101.

330. а) Имеем последовательность чисел:

$$a,\ b,\ a + b,\ a + 2b,\ 2a + 3b,\ 3a + 5b, \ldots$$

Сумма шести последовательных чисел делится на 4, так как она равна $8a + 12b$, а каждое слагаемое получившейся суммы делится на 4.

б) Прибавим к сумме, полученной выше, числа $5a + 8b$ и $8a + 13b$. Получим сумму $21a + 33b$, каждое слагаемое которой делится на 3, значит, сумма любых восьми последовательных чисел в последовательности Фибоначчи делится на 3.

331. б) $a(b+1) - c(a+b) + b(c+1) - (a+b) = ab + a - ca - cb + bc + b - - a - b = ab - ca$.

332. По основному свойству пропорции из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует, что $ad = bc$.

Проверим, удовлетворяет ли основному свойству пропорции равенство $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Для этого сравним произведения $(a+b)d$ и $(c+d)b$, т.е. суммы $ad + bd$ и $bc + bd$. Так как $ad = bc$, то $ad + bd = bc + bd$ и $(a+b)d = (c+d)b$.

333. Автобусу осталось пройти $200 - (x + (x - 20) + 1{,}5\ (x - 20))$ (км). Преобразовав выражение, получим $(250 - 3{,}5\ x)$ км.

334. Длина всего провода составит $x + 3x + (x + 1{,}5) + 0{,}5\ x$ (м), т. е. $5{,}5\ x + 1{,}5$ (м).

335. В коробке стало $2(2(2n - 12) - 12) - 12$ (пуговиц), т. е. $8n - 84$ (пуговиц).

Глава 4. Уравнения (10 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
4.1. Алгебраический способ решения задач 4.2. Корни уравнения	3	О-18, О-19, П-36	79—83 84—85
4.3. Решение уравнений 4.4. Решение задач с помощью уравнений	5	О-20, О-21, «*Проверь себя*», П-37—П-40	86—92 93—98
Обзор и контроль	2		

Основные цели. Сформировать умение решать линейные уравнения, а также создать начальные представления об алгебраическом методе решения текстовых задач.

Обзор главы. Содержание главы направлено на достижение двух взаимосвязанных учебных целей — освоение учащимися приёмов решения линейных уравнений с одной переменной, а также осознание ими сущности алгебраического метода решения текстовых задач и формирование начальных навыков решения задач с помощью уравнений.

Термин «уравнение» уже знаком учащимся; им в принципе известна и возможность составления уравнений по условию задачи. Однако опыт такой работы в силу общей концепции курса, в соответствии с которой в 5—6 классах акцент делается на арифметические способы решения задач, к этому моменту невелик. Поэтому с полным правом можно считать, что в главе 4 начинается обучение решению уравнений и текстовых задач методом составления уравнений.

В то же время следует помнить, что арифметическим (точнее, логическим) способам решения задач в 5—6 классах уделялось очень много внимания. Текстовые задачи уже решались и в 7 классе. Теперь должен сыграть роль приобретённый опыт работы с задачами (анализ и переформулировка условия, установление связей между величинами и др.) и облегчить овладение деятельностью по составлению уравнений по условию задачи.

Переводу условия задачи на алгебраический язык в учебнике уделяется большое внимание. Этому посвящён первый пункт главы. Подчёркивается возможность составления разных уравнений по одному и тому же условию.

Переход к алгебраическому способу решения задач одновременно служит и мотивом к овладению приёмами решения уравнений. Рассматриваются два основных правила равносильных преобразований уравнений, но при этом сам термин «равносильные уравнения» пока не вводится. Это будет сделано позже, в следующих классах, когда возникнет необходимость в разговоре о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений. Все уравнения, которые встречаются учащимся в данной главе, сводятся к линейным, т. е. к уравнениям вида $ax = b$, где a и b — числа, x — переменная. Термин «линейное уравнение» в учебнике используется, рассматривается его общее решение для случая, когда $a \neq 0$; однако исследование для случаев $a = 0$, $b \neq 0$ и $a = 0$, $b = 0$ не проводится. Здесь, на первом этапе, внимание уделяется основному случаю; вопросы исследования отнесены на более поздний период.

Завершается глава решением задач алгебраическим методом. При этом в ряде заданий предлагается сопоставить арифметический и алгебраический методы решения, что позволяет понять особенность каждого из них; преимущества, которые предоставляет алгебраический метод.

В рубрике «*Для тех, кому интересно*» рассматривается несколько примеров решения нелинейных уравнений с одной переменной с помощью подбора корней. Этот материал расширяет представление учащихся об уравнениях, открывает перед ними некоторые перспективы, а также позволяет применить известные приёмы решения задач, например перебор вариантов.

Основные виды деятельности. Переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения. Проводить доказательные рассуждения о корнях уравнения с опорой на определение корня.

Объяснять и формулировать правила преобразования уравнений. Конструировать алгоритм решения линейных уравнений, распознавать линейные уравнения, решать линейные уравнения, а также уравнения, сводящиеся к ним, с помощью простейших преобразований.

Решать текстовые задачи алгебраическим способом: составлять уравнение по условию задачи, решать составленное уравнение. Проводить рассуждения, основанные на интерпретации условия поставленной задачи, для поиска целых корней некоторых несложных нелинейных уравнений.

Комментарий к использованию ЭИ. Работа с ЭИ позволяет отработать в интерактивном режиме навыки решения уравнений с одной переменной.

Упражнения п. 1.6 «Уравнения с одной переменной» можно предложить всем учащимся полностью на первоначальном этапе обучения решению уравнений и текстовых задач методом составления уравнений.

Учебник		**ЭИ**		
Глава	**Пункт**	**Раздел**	**Тема**	**Пункт**
4. Уравнения	4.1. Алгебраический способ решения задач	Алгебра, 7—9	1. Введение в алгебру	1.6. Уравнения с одной переменной, задания 3—4, 7
	4.2. Корни уравнения			1.6. Уравнения с одной переменной, задания 1, 2
	4.3. Решение уравнений			1.6. Уравнения с одной переменной, задания 5—6, 8

4.1. Алгебраический способ решения задач

Методический комментарий

Назначение пункта — разъяснить сущность алгебраического метода решения задач. Для понятия «уравнение» не даётся определения, которое нужно было бы запомнить; этим словом в учебнике называется равенство, являющееся переводом условия задачи на язык алгебры.

В качестве объяснительного примера в тексте разобрана интересная, но нелёгкая задача о суммарном возрасте двух пар близнецов. Полезно сопоставить арифметический и алгебраический способы её решения. Так как арифметическим способом эту задачу решить трудно, то эффект алгебраического решения будет весьма ощутимым. Это послужит для учащихся важным мотивом овладения алгебраическим методом.

Приведём арифметическое решение указанной задачи. Складывается возраст четверых детей. В 2000 г. возраст каждого из них на 2 года меньше, значит, их суммарный возраст меньше на $2 \cdot 4 = 8$ (лет). Таким образом, в 2000 г. близнецам вместе было $50 - 8 = 42$ (года).

Если бы все они были в возрасте младших, то в 2000 г. им было бы вместе 42 – 3 · 2 = 36 (лет). Значит, младшим в 2000 г. было по 36 : 4 = 9 (лет), а старшим — по 9 + 3 = 12 (лет).

Подчеркнём, что при алгебраическом решении этой задачи нужно не только составить уравнение, но и получить ответ. Иначе у учащихся останется ощущение незавершённости, и методическая идея окажется необыгранной. Коллективное решение уравнения не должно оказаться трудным; все необходимые знания для этого есть.

Возможно, учитель посчитает задачу, разобранную в тексте, чрезмерно сложной для вводного урока. В этом случае мы рекомендуем заменить её другой, например задачей **336** (*а*).

Все задания этого пункта предполагают только составление (но не решение!) уравнений. Советуем так и поступить. Ведь составление уравнения по условию задачи — самостоятельная и труднодостижимая учебная цель. Гораздо важнее довести до сознания учащихся идею о возможности составления разных уравнений по одному и тому же условию (задачи **336**, **337**, **343**, **344**). В дальнейшем, при изучении п. 4.4, можно поговорить о том, какое уравнение выгоднее выбрать. В то же время, после того как в п. 4.3 учащиеся познакомятся с приёмами решения уравнений, к этим задачам при желании можно будет вернуться и решить их полностью.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться заданиями из раздела **А**. Желательно 2—3 раза на доске и в тетрадях полностью описать процесс составления уравнения.

Комментарий к упражнениям

341—342. Первую задачу желательно разобрать в классе. Уравнение по задаче **342** составляется по такому же плану. Её можно предложить для самостоятельной работы в классе или дома.

343. а) 1) Пусть Петру x лет, тогда отцу $3x$ лет, а деду $6x$ лет. Имеем уравнение

$$x + 3x + 6x = 110.$$

2) Пусть отцу x лет, тогда Петру $\frac{x}{3}$ лет, а деду $2x$ лет. Имеем уравнение

$$\frac{x}{3} + x + 2x = 110.$$

3) Пусть деду x лет, тогда Петру $\frac{x}{6}$ лет, а отцу $\frac{x}{2}$ лет. Имеем уравнение

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{2} + x = 110.$$

б) 1) Пусть сестре сейчас x лет, тогда брату сейчас $(x + 4)$ года. Через 2 года сестре будет $(x + 2)$ года, а брату $(x + 6)$ лет. Имеем уравнение

$$(x + 2) + (x + 6) = 16.$$

2) Пусть брату сейчас x лет, тогда сестре сейчас $(x - 4)$ года. Через 2 года брату будет $(x + 2)$ года, а сестре $(x - 2)$ года. Имеем уравнение

$$(x + 2) + (x - 2) = 16.$$

3) Пусть сестре через 2 года будет x лет, тогда брату будет $(x + 4)$ года. Имеем уравнение

$$x + (x + 4) = 16.$$

4) Пусть брату через 2 года будет x лет, тогда сестре будет $(x - 4)$ года. Имеем уравнение

$$x + (x - 4) = 16.$$

Таким образом, мы составили четыре разных уравнения.

344. а) x — число фазанов; $2x + 4(35 - x) = 94$;

б) x — число кроликов; $4x + 2(35 - x) = 94$;

в) x — число ног у фазанов; $\frac{x}{2} + \frac{94 - x}{4} = 35$;

г) x — число ног у кроликов; $\frac{x}{4} + \frac{94 - x}{2} = 35$.

347. Задача очень трудная. Пусть некто имел x р. Тогда у него стало бы (x + 100) р., значит, у друга было $\left(\frac{x+100}{2}+100\right)$ р. Если бы некто отдал другу 10 р., у него осталось (x – 10) р., а у друга стало $\left(\frac{x+100}{2}+100+10\right)$ р. Имеем уравнение

$$\frac{x+100}{2} + 100 + 10 = 6(x - 10).$$

4.2. Корни уравнения

Методический комментарий

В результате изучения пункта учащиеся должны уметь отвечать на вопросы: *что называется корнем уравнения* и *что значит «решить уравнение»*. Эти определения составляют основу оперативных умений; их знание необходимо для успешного усвоения материала.

Заданиям обязательного уровня соответствуют уравнения **348**—**350**.

Комментарий к упражнениям

350. в) Если класс сильный, то можно предложить порассуждать; например, не проводя вычислений, доказать, что числа 0, 1 и 2 не могут быть корнями данного уравнения.

О т в е т. При подстановке в уравнение $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ вместо переменной x положительного числа в его левой части всегда будет получаться положительное число.

352. а) Выражения $3x - 6$ и $3(x - 2)$ равны, а значит, при любом значении x они принимают одно и то же значение.

354. О т в е т. Корнем является любое неотрицательное число.

355. О т в е т. Множество отрицательных чисел.

4.3. Решение уравнений

Методический комментарий

Переход к алгебраическому способу решения задач одновременно служит мотивом для овладения приёмами решения уравнений. В пункте рассматриваются общие правила преобразования уравнений, позволяющие заменять одно уравнение другим, имеющим те же корни. Термин *равносильные уравнения* здесь не используется.

Приведём некоторые советы по изучению материала. Текст следует рассматривать небольшими фрагментами, сопровождая каждый из них достаточным для закрепления материала числом заданий. Уже на третьем уроке в систему упражнений можно включать решение несложных задач алгебраическим методом из п. 4.4, помня, однако, что пока главная цель — обучение решению уравнений.

Свойства числовых равенств, из которых следуют правила преобразований уравнений, желательно проиллюстрировать на примерах. Возьмём, например, верное равенство $20 : 2 = 5 \cdot 2$. Прибавим к обеим его частям одно и то же число 7; получим равенство $20 : 2 + 7 = 5 \cdot 2 + 7$, которое тоже будет верным.

После того как будет сформулировано первое правило преобразования уравнений, полезно предложить учащимся элементарные упражнения, направленные на его усвоение:

1) перенесите в уравнении $3x + 1 = 6x + 14 - x$ все слагаемые, содержащие переменную, в левую (правую) часть;

2) запишите какое-нибудь уравнение, которое можно получить из уравнения $2x - 5 = 3x + 7$ переносом слагаемого в другую его часть.

Теперь можно решить уравнения из задания **356.**

На отработку второго правила преобразования уравнений направлены упражнения **357—359.** Советуем обратить внимание на возможность обучения такому приёму: обе части уравнения делим или умножаем на такое число, чтобы коэффициент при переменной стал равным 1.

Примеры 1—3 из учебника — это образцы рассуждений в наиболее типичных случаях при решении уравнений. После каждого примера должна следовать соответствующая группа упражнений.

Обязательные результаты обучения по данной теме (см. рубрику «*Чему вы научились*») помогут ограничить круг предлагаемых в учебнике упражнений в слабых классах. В то же время такой уровень подготовки вполне достаточен для решения задач алгебраическим методом.

Комментарий к упражнениям

368. Образец рассуждений показан в примере 3.

Прежде чем приступить к решению уравнений, полезно предложить следующие тренировочные упражнения:

1) упростите выражения: $\frac{y}{2}\cdot 2$, $\frac{y}{2}\cdot 6$, $\frac{y}{2}\cdot(-4)$;

2) упростите выражения: $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 6$, $\left(\frac{1}{5}+\frac{x}{2}\right)\cdot 10$.

373. Неверный ответ ученика опровергается решением предложенного уравнения.

374—376. Полезные приёмы решения уравнений. Желательно рассмотреть в любом классе.

378. а) Тот факт, что вместо c можно взять любое целое число, легко увидеть сразу. Если учащиеся ограничатся целыми числами, следует спросить: «А нельзя ли вместо c взять какое-нибудь дробное число?»

4.4. Решение задач с помощью уравнений

Методический комментарий

Прежде всего подчеркнём, что введение алгебраического метода решения задач не означает забвение и запрещение приёмов рассуждений, которыми учащиеся уже овладели. Должно произойти обогащение и расширение знаний, а не вытеснение старого новым. Поэтому в учебнике встречаются задания, а которых предлагается решить задачу и арифметическим, и алгебраическим способом **384—387**, **407**, **408**. Важно, чтобы учащиеся почувствовали, что в сложных фабульных ситуациях алгебраический способ оказывается проще, а значит, и предпочтительнее. Если им захочется показать, что задачу легко решить рассуждениями, то это очень хорошо, и учителя можно только поздравить с результатом, достигнутым в обучении. Но ученикам нужно пояснить, что теперь их основная цель — овладение алгебраическим методом, и поэтому им предлагается для этой же задачи составить ещё и уравнение. Полезно при этом обсудить, какой способ решения оказался легче.

Учащиеся уже знают, что по условию задачи можно составить разные уравнения. Кроме того, у них уже появился определённый опыт решения уравнений, и они знают, что, например, уравнения, содержащие дроби, решать труднее. Поэтому теперь уместно поговорить о том, что при переводе задачи на алгебраический язык имеет смысл стараться получить более простое уравнение. Некоторые советы в учебнике помогают получить более простой перевод. Они сформулированы коротко и образно: «Целое лучше дроби», «Плюс лучше минуса».

Эти рекомендации можно обсудить при разборе задачи из объяснительного текста. Решим её по-разному.

Обозначим буквой x одну из искомых величин и составим соответствующее уравнение.

Пусть на первом складе стало x т угля, тогда на втором стало (x – 620) т угля. На первом складе сначала было $\frac{x}{2}$ т, а на втором x – 620 – 120 = x – 740 (т). По условию на двух складах первоначально было 1840 т угля. Получаем уравнение

$$\frac{x}{2}+\left(x-740\right)=1840.$$

Теперь попробуем рассуждать иначе (ведь совсем не обязательно выбирать в качестве неизвестного то, что требуется в задаче!). Может быть, мы сумеем составить более простое уравнение.

Пусть на первом складе было x т угля, тогда на втором складе было (1840 – x) т угля. На первом складе стало $2x$ т угля, а на втором — (1840 — x) + 120 = 1960 – x (т). По условию на втором складе стало на 620 т угля меньше. Получаем уравнение

$$2x – (1960 – x) = 620.$$

Теперь можно обсудить, какое уравнение проще, и довести решение до конца. Уместно также поговорить и о том, что условие «на втором складе стало на 620 т угля меньше» можно перевести на алгебраический язык иначе, используя вместо знака «–» знак «+». Получим уравнение

$$2x = (1960 – x) + 620.$$

При желании учитель может показать и табличный способ оформления решения.

Пусть на первом складе было x т угля.

Склад	Было угля (т)	Изменение в количестве угля	Стало угля (т)
1-й	x	увеличилось в 2 раза	$2x$
2-й	1840 – x	добавилось 120 т	1960 – x

По условию на втором складе стало на 620 т угля меньше, поэтому

$$2x – (1960 – x) = 620.$$

Подобные рассуждения в слабом классе можно провести на более простых задачах (например, на задачах **381** и **382.** Ещё один совет. Как и при арифметическом способе решения, полученный ответ надо (иногда) проверять на соответствие условию.

При изучении этой темы особенно полезна работа в малых группах. Решение задач — сложная деятельность, и на первых порах коллективное обсуждение может помочь.

Комментарий к упражнениям

381. б) Следует переформулировать условие, используя слово «больше»: второе число в 5 раз больше первого, а третье число в 2 раза больше второго.

Задачи **389** и **390** разные по сюжету, но схема составления уравнений одна и та же: с помощью равенства записывается, что расстояние, которое прошёл пешеход и проехал велосипедист, одно и то же (задача **398**), что в ящики и корзины разложили одинаковое количество яблок (задача **390**, а); что в коробках и пакетах одинаковое количество конфет (задача **390,** б).

389. а) Ответ. 4 км/ч; 12 км/ч.

390. а) Ответ. 9 кг; 6 кг.

392. Ответ. 30 км.

393. Способ 1. Пусть расстояние от реки до деревни равно x км. Имеем уравнение

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=1.$$

Способ 2. Пусть на путь от реки до деревни Андрей затратил x ч, тогда на обратный путь он затратил $(1 - x)$ ч. Имеем уравнение

$$10x = 15(1 - x).$$

396. Пусть первую половину пути велосипедист проехал со скоростью x км/ч. Имеем уравнение

$$3x = 2(x + 4).$$

398. Пусть было x больших пакетов, тогда маленьких было $(16 - x)$. Имеем уравнение

$$500x = 300(16 - x).$$

399. Пусть в коробку вмещается x кг, тогда в пакет вмещается $(x + 2)$ кг. Составляем уравнение

$$3(x + 2) = 5x.$$

400. а) Удобно обозначить среднее число через $2n$. Тогда имеем уравнение

$$(2n - 2) + 2n + (2n + 2) = 72.$$

б) Пусть среднее число равно $2n + 1$, тогда предыдущее и последующее числа равны $2n - 1$ и $2n + 3$.

При решении задач **401** и **402** должна проявить себя привычка искать в условии наименьшую величину.

402. б) Пусть во втором пакете x кг крупы, тогда в первом $1{,}5\,x$ кг, а в третьем и четвёртом — по $(x + 0{,}5)$ кг. Составляем уравнение

$$1{,}5x + x + 2(x + 0{,}5) = 14{,}5.$$

403. б) Требуется переформулировать условие задачи: велосипедист выехал на 1 ч позже, а приехал на 0,5 ч раньше; иными словами, на путь от лагеря до станции он затратил на 1,5 ч меньше, чем пешеход.

Если через x обозначить время движения пешехода (в ч), то получим уравнение

$$4x = 10(x - 1{,}5).$$

405. а) Пусть длина одной части x м, тогда длина другой $x - 0{,}2x = 0{,}8x$ (м). Имеем уравнение

$$x + 0{,}8x = 9{,}9.$$

406. б) Пусть первоначальная стоимость товара x р. Тогда после повышения цены на 20% он стал стоить $x + 0{,}2x = 1{,}2x$ (р.). Эта цена была снижена на 15%, и товар стал стоить $(1{,}2x - 1{,}2x \cdot 0{,}15)$ р. Имеем уравнение

$$1{,}2x - 1{,}2x \cdot 0{,}15 = 102.$$

Умножение легче выполнить, если вынести $1{,}2x$ за скобки. Имеем:

$$1{,}2x(1 - 0{,}15) = 102,$$

$$1{,}2x \cdot 0{,}85 = 102,$$

$$x = \frac{102}{1{,}2 \cdot 0{,}85},$$

$$x = 100.$$

407. Способ 1.

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$ — такую часть марок Дима отдал;

$1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$ — такую часть марок он оставил себе.

На $\frac{19}{30}$ набора приходится 19 марок. Значит, весь набор составляет $19 : \frac{19}{30} = 30$ (марок).

Способ 2. Пусть в наборе было x марок. Имеем уравнение

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + 19 = x.$$

408. Способ 1. В корзине осталось 10 орехов. Перед этим в ней оставалось 20 орехов. На предыдущем шаге оставалось 40 орехов. До этого 80 орехов. И наконец, первоначально было 160 орехов.

Мы решали задачу с конца. Трудность в том, чтобы не ошибиться в числе удвоений. Помощь в этом может оказать рисунок 4.

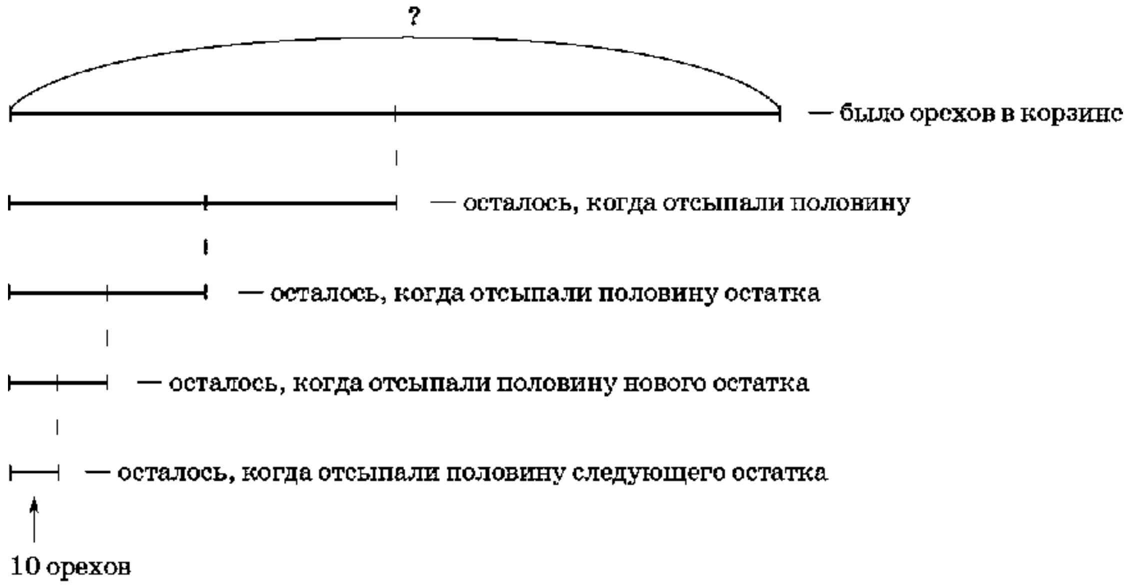

Рис. 4

С п о с о б 2. Пусть в корзине было x орехов, тогда в первый раз отсыпали $\frac{x}{2}$ орехов и в корзине осталось $\frac{x}{2}$ орехов. Во второй раз отсыпали $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{x}{4}$ орехов, в корзине осталось $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=\frac{x}{4}$ орехов. В третий раз отсыпали $\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{x}{8}$ орехов, в корзине осталось $\frac{x}{4}-\frac{1}{8}=\frac{x}{8}$ орехов. В четвёртый раз отсыпали $\frac{x}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{x}{16}$ орехов, в корзине осталось $\frac{x}{8}-\frac{x}{16}=\frac{x}{16}$ орехов.

По условию задачи в корзине осталось 10 орехов. Составим уравнение:

$$\frac{x}{16}=10,$$
$$x=160.$$

О т в е т. 160 орехов.

409. Пусть в стаде было x гусей. Имеем уравнение

$$x+x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+1=100.$$

410. Пусть у Пифагора было x учеников. Имеем уравнение

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x.$$

411. Пусть весь путь равен x вёрстам. Путник прошёл путь, равный $\left(3+\frac{1}{3}(x-3)\right)$ вёрстам. Следующее условие формулируем так: если бы он прошёл ещё одну версту, то осталось бы пройти половину всего пути, т. е. он прошёл бы половину всего пути. Имеем уравнение

$$3+\frac{1}{3}(x-3)+1=\frac{1}{2}x.$$

Решив уравнение, найдём, что $x = 18$. Значит, путнику осталось пройти 15 вёрст.

412. Пусть в ящике было x р. Первый мужчина положил столько же и взял 2 р., после чего в ящике осталось $(2x – 2)$ р.

Второй мужчина положил столько же, сколько осталось, и забрал 2 р.; после чего в ящике осталось

$$(2x - 2) + (2x - 2) - 2 = 4x - 6 \text{ (р.)}.$$

Третий мужчина положил столько же, сколько осталось, и забрал 2 р; после чего в ящике осталось

$$(4x - 6) + (4x - 6) - 2 = 8x - 14 \text{ (р.)}.$$

Имеем уравнение

$$8x - 14 = 0.$$

Отсюда находим, что $x=1\frac{3}{4}$, т. е. в ящике было 1 р. 75 к.

Результат кажется неправдоподобным, поэтому пусть ученики проделают все описанные в задаче манипуляции с найденной суммой.

4.5. Некоторые неалгоритмические приёмы решения уравнений (*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

В пункте разбираются два примера решения уравнений с помощью неожиданного и эффектного приёма — подбора корней. Он основывается на содержательной трактовке выражений, входящих в уравнение. Упражнения **413** и **414** фактически дублируют вторую задачу, разобранную в объяснительном тексте, остальные упражнения содержат некоторые новые идеи.

Комментарий к упражнениям

415. В левой части уравнения — сумма двух последовательных квадратов, и она равна 25; понятно, что это 9 и 16. Далее достаточно решить уравнения $x^2 = 16$ и $x^2 = 9$ и для каждого найденного числа с помощью подстановки выяснить, является ли оно корнем данного уравнения.

Ответ. 4 и –3.

417. Прежде всего устанавливаем, что сумма двух смежных сторон прямоугольника равна 14 см. Приходим к двум следующим задачам:

1) Сумма двух натуральных чисел равна 14. Может ли их произведение равняться 33? Перебирая пары натуральных чисел, сумма которых равна 14, находим пару: 3 и 11.

Ответ. Может.

2) Выясним теперь, может ли произведение двух натуральных чисел, дающих в сумме 14, равняться 40. Точно так же, перебирая пары чисел, сумма которых равна 14, находим пару: 4 и 10.

Ответ. Может.

Этот перебор можно сократить, если заметить следующее: так как произведение — чётное число, то хотя бы один из множителей также является чётным; так как сумма, равная 14, — чётное число, и одно из слагаемых является чётным, то и второе слагаемое — чётное число.

Дополнительные задания

Указания и решения

431. Способ 1. Пусть было x друзей. Имеем уравнение $20x + 40 = 30x - 60$.

Здесь в левой и правой частях равенства — стоимость мяча.

Способ 2. Пусть мяч стоит x р. Имеем уравнение

$$\frac{x-40}{20} = \frac{x+60}{30}.$$

Здесь в левой и правой частях равенства — число друзей.

432. Способ 1. Пусть в 1 кг смеси содержится x кг конфет по 110 р., тогда конфет по 150 р. будет $(1 - x)$ кг. Имеем уравнение

$$110x + 150(1 - x) = 120, \ x = 0{,}75.$$

Способ 2. Пусть 1 кг смеси содержит x кг конфет по 150 р. Имеем уравнение

$$150x - 110(1 - x) = 120, \ x = 0{,}25.$$

433. Способ 1. Пусть Диме x лет, тогда Толе $2x$ лет, а Коле $(x + 4)$ года. Имеем уравнение

$$2x - (x + 4) = 4.$$

Способ 2. Пусть Толе x лет, тогда Диме $\frac{x}{2}$ лет, а Коле $\left(\frac{x}{2}+4\right)$ года. Имеем уравнение

$$x - \left(\frac{x}{2}+4\right) = 4.$$

Способ 3. Пусть Коле x лет, в этом случае Диме $(x - 4)$ года, а Толе $2(x - 4)$ года. Имеем уравнение

$$2(x - 4) - x = 4.$$

Глава 5. Координаты и графики (10 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
5.1. Множества точек на координатной прямой 5.2. Расстояние между точками координатной прямой 5.3. Множества точек на координатной плоскости	4	О-22, О-23, П-41, П-42	99—102 103—115
5.4. Графики 5.5. Ещё несколько важных графиков 5.6. Графики вокруг нас	4	О-24—О-26, «*Проверь себя*», П-43—П-45	116—123 124—129 130, 131
Обзор и контроль	2		

Основные цели: развить умения, связанные с работой на координатной прямой и на координатной плоскости; познакомить с графиками зависимостей $y = x$, $y = -x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$; сформировать первоначальные навыки интерпретации графиков реальных зависимостей.

Обзор главы. В этой главе, с одной стороны, развиваются сформированные ранее умения работать на координатной прямой и координатной плоскости, а с другой — закладывается содержательная основа для изучения в последующем функционально-графической линии курса алгебры.

Характерной особенностью материала данной главы является постоянная взаимосвязь алгебраического и геометрического языков, переход от буквенного равенства или неравенства к геометрическому образу и наоборот.

Идея такой взаимосвязи будет проходить красной нитью через разные разделы курса в последующих классах. Её осознание учащимися является важной предпосылкой для приобретения ими знаний, обладающими такими качествами, как системность, гибкость, подвижность.

Начинается глава с рассмотрения множеств точек на координатной прямой и координатной плоскости. Здесь вводится довольно много терминов, но их усвоение облегчается за счёт того, что они «заимствованы» из геометрии. Важно, чтобы за каждым новым словом в сознании ученика стоял соответствующий образ. В связи с этим чрезвычайно полезны таблицы, подобные приведённой в п. 5.1 учебника.

Далее рассматриваются некоторые «базовые» графики — множества точек координатной плоскости, задаваемых равенствами, связывающими переменные x и y. По сравнению с традиционными курсами акцент здесь перенесён с теоретической плоскости на практическую. Здесь пока нет сложного для учащихся этого возраста функционального языка, но зато есть большой объём интересной и содержательной работы с графиками. В этой части главы основные теоретические сведения — это знание вида и особенностей графиков нескольких зависимостей $y = x$, $y = –x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$; учащиеся должны уметь не только изображать их в координатной плоскости по некоторым «опорным» точкам, но и строить на их основе более сложные графики. Завершается эта часть главы работой с графиками реальных зависимостей.

Все построения — изображение областей на плоскости и графиков зависимостей — должны выполняться достаточно бегло, но аккуратно; можно использовать цветные карандаши. Материал должен вызывать эстетические чувства.

Определённое внимание в главе уделяется разнообразной работе с таким традиционно трудным для учащихся понятием, как модуль числа. Рассматривается формула расстояния между точками координатной прямой;

на основе геометрической трактовки модуля разности решаются уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля; строятся множества точек плоскости, задаваемые соотношениями вида $|x| = a$, $|y| \leq b$ и т. д.; рассматриваются графики уравнений $y = |x|$ и $|y| = |x|$. В пункте из рубрики «*Для тех, кому интересно*» также предлагается рассмотрение графиков зависимостей, заданных равенствами с модулями.

Основные виды деятельности. Изображать числа точками координатной прямой, пары чисел точками координатной плоскости. Строить на координатной плоскости геометрические изображения множеств, заданных алгебраически, описывать множества точек координатной плоскости (области, ограниченные горизонтальными и вертикальными прямыми и пр.) алгебраическими соотношениями.

Строить графики простейших зависимостей, заданных алгебраическими соотношениями, проводить несложные исследования особенностей этих графиков.

Моделировать реальные зависимости графиками. Читать графики реальных зависимостей.

5.1. Множества точек на координатной прямой

Методический комментарий

С координатной прямой учащиеся знакомы уже с 5 класса. Умение изображать число точкой на координатной прямой, сравнивать числа с опорой на координатную прямую относятся к обязательным результатам обучения в 6 классе. Содержание данного пункта — это числовые промежутки, их задание с помощью неравенств и геометрическое изображение.

Материал пункта носит опорный характер, поэтому он должен быть прочно усвоен. Учащиеся должны свободно переходить от алгебраической записи числовых промежутков к их геометрическому изображению и, наоборот, владеть соответствующей терминологией. Проблемы, которые могут возникнуть у учащихся при изучении этого вопроса, скорее всего будут связаны с плохим знанием соответствующего материала 5—6 класса. Поэтому в классах с невысоким уровнем математической подготовки имеет смысл проверить умение учащихся строить точки по их координатам, определять координаты отмеченных точек, выяснить, свободно ли они могут использовать знаки > и <.

Обязательные результаты обучения отражены заданиями типа **436**—**441**. Упражнения **442** и **443** — полезная работа с числами, актуализирующая умение сравнивать их, ориентироваться на координатной прямой. К ним примыкают упражнения **444**—**446.** В классах с невысоким уровнем подготовки этими заданиями можно ограничиться. В то же время обращаем внимание на упражнение **449** и **450**, при выполнении которых нужно будет выполнять операции над множествами, с которыми учащиеся познакомились в курсе 6 класса.

Комментарий к упражнениям

449. Использование цветных карандашей поможет учащимся визуально определить промежутки, являющиеся объединением или пересечением данных промежутков. Свой ответ учащиеся должны пояснить.

г) Объединение данных промежутков — это множество всех точек от –8 до 0 за исключением точки –4 (можно точку –4 назвать выколотой); пересечение данных промежутков — это пустое множество (∅).

5.2. Расстояние между точками координатной прямой

Методический комментарий

Прежде всего следует убедиться в том, что учащиеся знают и понимают следующий факт: расстояние от некоторой точки координатной прямой $A(a)$ до начала отсчёта равно модулю a. Это можно сделать с помощью вопросов такого типа:

1) Чему равно расстояние до начала отсчёта от точки: а) C (4); б) $D(–7,5)$; и) M (c)?

2) Чему равна длина отрезка OK, если известно, что точка K имеет координату, равную: а) 3; б) –10; в) m?

3) Какую координату имеет точка B, если известно, что $BO = 6$?

После этого можно перейти к рассмотрению формулы расстояния между двумя произвольными точками координатной прямой. Эта формула дана в учебнике без вывода; учащиеся должны убедиться в её справедливости для некоторых конкретных случаев, сопоставив результаты вычисления расстояния между точками по формуле с найденным непосредственно по рисунку. Полезно подчеркнуть, что формула расстояния от точки координатной прямой до начала отсчёта является частным случаем этой формулы.

Упражнения из раздела **А** в этом пункте сводятся в основном к нахождению расстояния между двумя точками координатной прямой (**451—453**), при этом учащиеся должны понимать, что длина отрезка с концами в точках M и N равна расстоянию между этими точками, и пользоваться и тем и другим оборотом речи.

Особого внимания заслуживает задача о координате середины отрезка (см. пример и упражнение **454**). Можно сообщить учащимся, что координата середины отрезка с концами в точках $A(a)$ и $B(b)$ равна $\frac{a+b}{2}$. Этот факт при желании нетрудно вывести, повторив на буквах рассуждение, проведенное в учебнике.

Все упражнения из раздела **Б** подчинены одной цели — показать возможности решения с помощью координатной прямой несложных уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, с помощью координатной прямой. Суть рассматриваемого приёма состоит в умении перевести на естественный язык такие предложения, как $|x| \le 10$, $|x - 6| = 2$; $|x + 4| > 3$ и т. д., используя геометрическую трактовку модуля разности. Эта идея получила дальнейшее развитие в рубрике «*Дополнительные задания*» (см. упражнения **514** и **515**).

В классах с невысоким уровнем подготовки можно рассмотреть формулу расстояния и ограничиться выполнением упражнений **451, 452, 453, 455, 457**. Кроме того, желательно попытаться разобрать упражнения **458** и **459** из раздела **Б**. Отработки соответствующих навыков здесь не требуется.

Комментарий к упражнениям

456. Обозначим координаты точек, которые делят отрезок AB на четыре равные части, через x_1, x_2, x_3. Чтобы найти x_1, надо к координате точки A прибавить четверть расстояния между точками A и B: $AB = |-4 - 18| = 22$, $22 : 4 = 5{,}5$, поэтому $x_1 = -4 + 5{,}5 = 1{,}5$. Находим далее $x_2 = 1{,}5 + 5{,}5 = 7$, $x_3 = 7 + 5{,}5 = 12{,}5$.

Если была введена формула координаты середины отрезка, то можно решить задачу, трижды применив эту формулу.

460. а) Расстояние от точки m до 1 равно 5.

б) Расстояние от точки m до 6 меньше 20.

в) Расстояние от точки a до -2 больше 3.

г) Расстояние от точки c до -10 не больше 1.

Рекомендуем не только прочитать данное условие, но и показать на координатной прямой соответствующее множество точек.

5.3. Множества точек на координатной плоскости

Методический комментарий

Учащиеся уже знакомы с общей идеей координат, умеют определять координаты точки в прямоугольной системе координат на плоскости и строить точку по заданным координатам.

Теперь делается следующий шаг: рассматриваются различные множества точек на координатной плоскости (горизонтальные и вертикальные прямые, полуплоскости, полосы, прямоугольники). Основное требование связано с умением перейти от алгебраического описания множества точек к геометрическому изображению и наоборот. Прежде всего учащиеся должны научиться изображать прямые вида $x=c$ и $y=c$, записывать уравнения прямых, параллельных координатным осям, знать уравнения осей координат (**462**—**464**). Только после этого можно перейти к изображению и описанию различных областей координатной плоскости (полос, полуплоскостей и т. д.).

Если при изучении предыдущего пункта не вызвали затруднения такие задания, как **458** и **459**, то здесь есть смысл выполнить упражнение **472** из раздела **Б;** получатся красивые симметричные графики. Подобный одному из них изображён на первом форзаце учебника.

В классах со слабой подготовкой советуем ограничиться заданиями из раздела **А.**

Комментарий к упражнениям

464. Сначала следует сделать рисунок, а затем записать уравнение прямой.

472. Если ученик легко справляется с требованием изобразить на координатной прямой точки, удовлетворяющие условию $|x| = 3$, то ему нетрудно будет построить и соответствующий образ в координатной плоскости. Если упражнения типа **458** не выполнялись или вызывали затруднение, то это задание лучше пропустить.

473. в) Решение показано на рисунке 5.

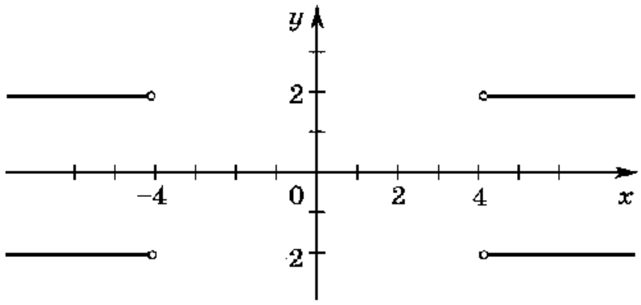

Рис. 5

474. Сначала выполняется геометрическое построение, а затем с рисунка «считывается» о т в е т: а) $x = -3$; б) $x = -1$.

5.4. Графики

Методический комментарий

Следующий шаг в этой теме — знакомство с некоторыми графиками. График выступает как геометрическое изображение зависимости, связывающей координаты точек на плоскости. В данном пункте рассматриваются графики, которые задаются равенствами $y = x$ (абсциссы и ординаты точек равны), $y = -x$ (абсциссы и ординаты точек противоположны), $|y| = |x|$ (абсциссы и ординаты точек равны по модулю).

Основной акцент должен быть сделан на графиках зависимостей $y = x$ и $y = -x$. Учащиеся должны уметь быстро изображать соответствующие прямые, называть точки, через которые они проходят, и наоборот, указывать формулу, которой задаётся та или иная биссектриса. Это и есть обязательный результат изучения данного пункта. График, который задаётся соотношением $|y| = |x|$, рекомендуем рассмотреть только при наличии и времени и в сильных классах.

Для тренировочной работы рекомендуем задания типа: постройте график, который задаётся условиями: $y = x$ и $x \geq 0$; $y = x$ и $-1 \leq x \leq 3$; $y = -x$ и $|x| \leq 5$ и т. д. Этой же цели служит упражнение **481**.

Среди упражнений к пункту есть задания на построение графиков (упражнения **476, 479, 480**). Все эти графики учащиеся строят по точкам, причём берут столько точек, сколько нужно, чтобы увидеть линию, которой принадлежат точки. В данном случае графики — прямые линии. Обращаем внимание на то, что к этому выводу учащиеся приходят на основе построения. Факт, что уравнением вида $y = kx + b$ задаётся прямая, им пока не известен. (Об этом речь будет идти в курсе 8 класса — сначала в теме «Системы уравнений», а затем в главе «Функции».)

Комментарий к упражнениям

480. В слабом классе можно ограничиться пунктами «а» и «б»).

481. В каждом случае составляется таблица значений *x* и *y*, аналогичная приведённой в упражнении **476.**

482. Полезное задание (желательно выполнять в классе с любой подготовкой). Оно обратно задачам типа **476**. Там таблица составлялась по формуле и потом строился график, а здесь надо считать с графика координаты нескольких принадлежащих ему точек, занести их в таблицу, увидеть зависимость, связывающую координаты, и записать её на алгебраическом языке (в виде равенства, связывающего *x* и *y*).

а) После составления таблицы легко заметить, что ордината точки получается делением на 2 её абсциссы. (Можно сказать и так: абсцисса равна удвоенной ординате.) Скорее всего, будет дан о т в е т: $y = \frac{x}{2}$ (или $y = \frac{1}{2}x$). Но верным является, например, и такой ответ: $x = 2y$.

483. О т в е т. $y = -\frac{1}{2}x.$

484. Для того чтобы найти зависимость, которой удовлетворяют координаты прямой, симметричной прямой $y = 2x$ относительно оси абсцисс, можно составить таблицу соответственных значений x и y, используя построенный график.

О т в е т. $y = -2x.$

485. Если квадраты двух чисел равны, то эти числа либо равны, либо противоположны. Следовательно, условие $y^2 = x^2$ выполняется тогда и только тогда, когда $y = x$ или $y = -x.$ Значит, множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $y^2 = x^2,$ — это две биссектрисы.

5.5. Ещё несколько важных графиков

Методический комментарий

Здесь рассматриваются графики ещё трёх зависимостей: $y = x^2,$ $y = x^3,$ $y = |x|$. Эти графики, как и биссектрисы первого и третьего, а также и второго и четвёртого координатных углов $y = x$ и $y = -x,$ учащиеся должны уметь строить достаточно быстро, указывая несколько характерных точек, изображать их схематически. Это основной результат, который должен быть достигнут при изучении данного пункта.

Сформированные умения служат основой для выполнения более сложных упражнений на построение графиков кусочно-заданных зависимостей, т. е. зависимостей, заданных разными формулами на различных промежутках. Во всех подобных упражнениях в этом пункте «задействованы» только пять хорошо знакомых графиков, а также горизонтальные прямые. Это позволяет сосредоточиться на главном — на обучении построению графиков при кусочном задании зависимости.

Упражнения к этому пункту довольно трудоёмки. Поэтому укажем задания, которые выполнять необходимо. Прежде всего, это упражнения **488—490,** которые направлены на отработку умений строить указанные опорные графики. Кроме того, к ним следует отнести упражнения **492—494**. Все остальные упражнения — по усмотрению учителя.

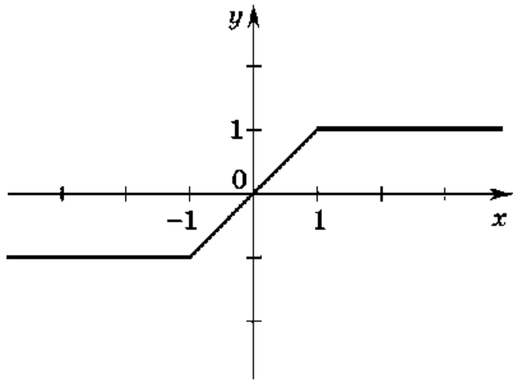

Рис. 6

В качестве *дополнительного задания* предлагаем такое: описать на алгебраическом языке график, изображённый на рисунке 6. Можно также организовать работу типа игровой ситуации: каждый ученик заранее дома чертит на листочке «картинку», используя известные графики, и передает её на уроке соседу по парте, чтобы он описал её на алгебраическом языке. Самые интересные рисунки демонстрируются классу.

Комментарий к упражнениям

487. При составлении таблиц в заданиях *а* и *б* можно использовать таблицы соответственных значений x и y для зависимостей $y=x^2$ и $y=x^3$, приведённых в тексте пункта. В каждом случае после построения графика, полезно обсудить, как связаны между собой графики зависимостей $y=x^2$ и $y=-x^2$, графики зависимостей $y=x^3$ и $y=-x^3$.

495—496. Здесь принципиально важно аккуратное построение графиков на клетчатой бумаге.

497. Желательно использовать цветные мелки или цветные карандаши для выделения на чертеже окончательного результата.

501. а) Если $x = 0$, то $y^2 = 0$, т. е. $y = 0$;

если $x = 1$, то $y^2 = 1$, т. е. $y = 1$ или $y = -1$;

если $x = 4$, то $y^2 = 4$, т. е. $y = 2$ или $y = -2$.

График изображён на рисунке 7, *а*.

б) График изображён на рисунке 7, *б*.

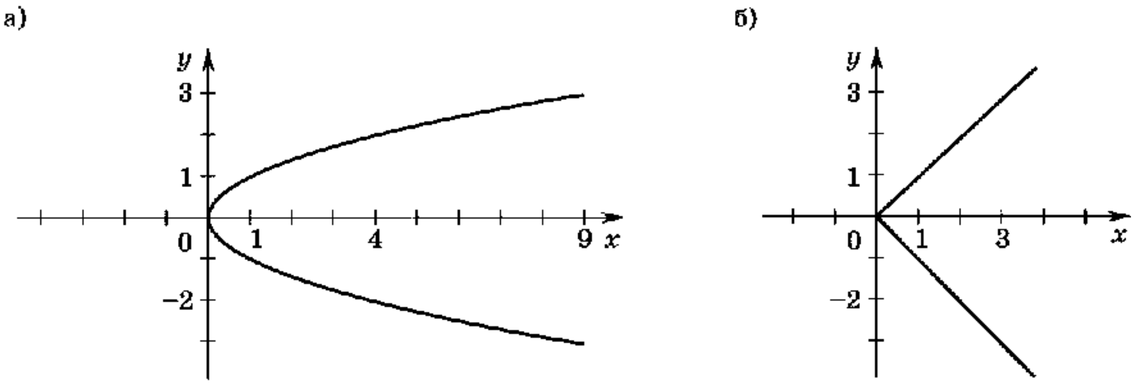

Рис. 7

5.6. Графики вокруг нас

Методический комментарий

Учитывая, что материал пункта достаточно лёгкий, можно посоветовать следующую методику его изучения. Предложить учащимся дома самостоятельно разобрать приведённый в учебнике текст, касающийся графика температуры. При этом каждый ученик должен на отдельном листе клетчатой бумаги выполнить построение, описанное в учебнике: начертить координатные оси и сделать соответствующую разметку по осям, построить точки, координаты которых занесены в таблицу, и соединить их плавной линией.

На уроке, для проверки того, как понят материал, учитель может предложить ответить на вопросы по чтению графика, при этом в качестве заданий следует использовать информацию, которая дана в тексте: когда температура была положительной (отрицательной); когда температура повышалась (понижалась) и т. д. О проведении такой работы учеников надо предупредить заранее.

Упражнения к пункту в основном на чтение графиков и решение несложных задач на основе полученной информации (см., например, задания **504** и **505**). Только в двух заданиях: **509** и **510** — требуется выполнить построение.

Так как за один урок, отведённый на изучение пункта, все задачи решить не удастся, а они интересны и важны с точки зрения общей идеологии курса, рекомендуем их включать в уроки и домашние задания при изучении следующих тем. Советуем также выполнить упражнения **521—523** из рубрики *«Дополнительные задания»*.

Комментарий к упражнениям

506. а) Начальный тираж газеты был равен примерно 40 тыс. экземпляров.

в) К концу февраля тираж стал примерно равным 240 тыс. экземпляров, т. е. составил $\frac{240}{40} = 6$ или 600% первоначального тиража, и, значит, тираж вырос примерно на 500%.

За весну (т. е. с 1.03 по 31.05) тираж увеличился примерно на 140 тыс. экземпляров. Это составляет примерно $\frac{140}{240} \approx 0{,}6$ или 60%. Тираж за весну вырос примерно на 60%.

5.7. Графики зависимостей, заданных равенствами с модулями (*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

Для выполнения упражнений к данному пункту требуется знание определения модуля и понимание того, как строить графики кусочно-заданных зависимостей.

Комментарий к упражнениям

511. Графики изображены на рисунке 8, *а—г*.

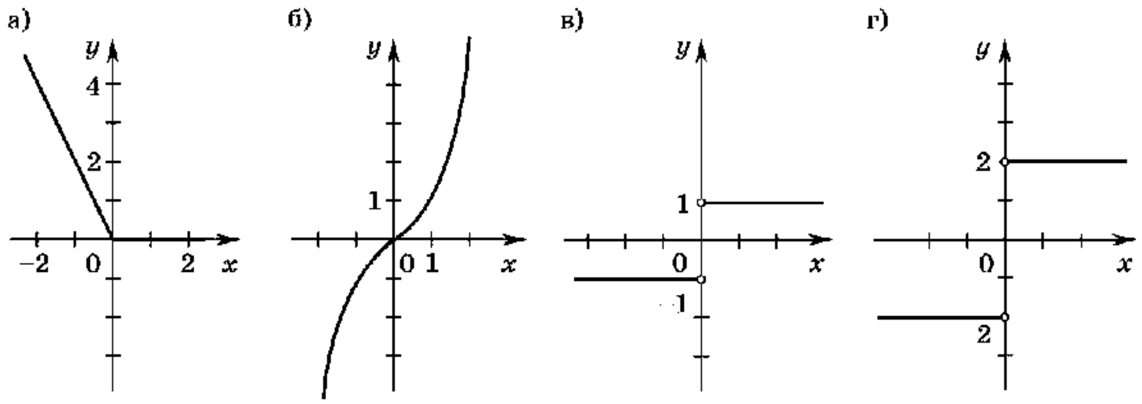

Рис. 8

Дополнительные задания

У к а з а н и я и р е ш е н и я

514. а) Равенство $|x|=|x-5|$ читается так: расстояние от точки x до точки 0 равно расстоянию от точки x до точки 5. Изобразим на координатной прямой числа 5 и 0 и найдём середину отрезка [5; 0]. Получим, что x = 2,5.

в) Расстояние от точки x до точки 2 равно расстоянию от точки x до точки 8. Изобразив на координатной прямой числа 2 и 8, найдём середину отрезка [2; 8]. О т в е т. x = 5.

515. а) Расстояние от точки x до точки 0 больше или равно расстоянию от точки x до точки 1. Опираясь на координатную прямую, ищем все точки x, удовлетворяющие этому условию. Расстояния равны, если x — середина отрезка с концами в точках 0 и 1, т. е. если x = 0,5. Точка x находится дальше от 0, чем от 1, если она расположена правее 0,5, т. е. если x > 0,5.

Ответ. $x \geq 0{,}5$.

б) Ответ: $x \leq 0$.

519. а) Точки рассматриваемого множества принадлежат вертикальной полосе, которая задаётся неравенством $|x| \leq 2$. Кроме того, они расположены выше прямой y = 3 и ниже прямой y = –3, т. е. координата y удовлетворяет неравенству $|y| \geq 3$.

Ответ. $|x| \leq 2$ и $|y| \geq 3$.

520. Заданным условиям удовлетворяют точки координатной плоскости, расположенные в области, являющейся пересечением областей $155 \leq h \leq 165$, где h — рост (в см), и $p \leq 45$, где p — вес (в кг). Выполнив на плоскости соответствующие построения, видим, что в ней содержится 5 точек.

Ответ. 5 девочек.

521. а) Остановкам соответствуют горизонтальные участки графика; их четыре. В учебнике можно подправить рисунок, поместив отрезки в узлы сетки.

б) 2 км.

в) 0,5 км/мин.

г) Нет. Катер шёл быстрее при движении во втором рейсе (туда и обратно).

522. а) за 22 мин.

б) 125 м/мин.

в) На пятом: 500 : 5 = 100 (м/мин).

Глава 6. Свойства степени с натуральным показателем (10 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
6.1. Произведение и частное степеней 6.2. Степень степени, произведения и дроби	4	О-27, О-28, П-46, П-47	132—143 144—153
6.4. Решение комбинаторных задач 6.5. Перестановки	4	О-29, О-30, «*Проверь себя*», П-48, П-49	154—157 158, 159
Обзор и контроль	2		

Основные цели: выработать умения выполнять действия над степенями с натуральными показателями и решать комбинаторные задачи на основе правила умножения, познакомить с формулой для подсчёта числа перестановок.

Обзор главы. Содержание главы составляют два самостоятельных блока — степень с натуральным показателем и комбинаторные задачи.

О степени как краткой записи произведения одинаковых множителей, учащиеся впервые узнали в 5 классе. Второй раз к этому вопросу они вернулись уже в 7 классе (см. п. 1. 3). Понятие степени было распространено на случай, когда её показатель равен 1. Учащиеся получили некоторый опыт преобразования выражений, содержащих степени, на основе определения этого понятия; научились определять порядок действий при вычислении значений выражений, содержащих степени, возводить в степень положительное число, отрицательное число, обыкновенную и десятичную дробь; запомнили часто встречающиеся квадраты и кубы чисел.

Теперь, при изучении главы 6, этот опыт развивается и совершенствуется. Но основной акцент здесь делается на преобразование буквенных выражений, содержащих степени. Правила преобразования основаны на свойствах степеней, которые записываются в буквенном виде и доказываются.

В ходе выполнения упражнений учащимся фактически приходится выполнять действия с одночленами — перемножать одночлены, возводить в степень, однако само понятие одночлена будет введено позже. Кроме того, выполняются упражнения на сокращение дробей, числители и знаменатели которых — произведения, содержащие степени.

В двух последних пунктах главы продолжается обучение решению комбинаторных задач. В явном виде формулируется комбинаторное правило умножения, некоторый опыт применения которого у учащихся уже есть. Даётся специальное название одному из видов комбинаций – перестановки, и рассматривается формула для вычисления числа перестановок. Это первая комбинаторная формула, с которой знакомятся учащиеся.

Основные виды деятельности. Формулировать, записывать в символической форме и обосновывать свойства степени с натуральным показателем, применять свойства степени для преобразования выражений и вычислений.

Выполнять перебор всех возможных вариантов для пересчёта объектов или комбинаций.

Применять правило комбинаторного умножения для решения задач на нахождение числа объектов или комбинаций (диагонали многоугольника, рукопожатия, число кодов, шифров, паролей и т. п.).

Распознавать задачи на определение числа перестановок и выполнять соответствующие вычисления.

6.1. Произведение и частное степеней

Методический комментарий

По содержанию этот пункт в значительной степени является обобщением и систематизацией сведений, о которых у учащихся уже есть некоторые представления. Поэтому объяснительный материал может и должен разбираться с активным участием учеников. Здесь формулируется определение степени с натуральным показателем и рассматриваются свойства произведения и частного степеней. Учащиеся должны знать словесные формулировки свойств (они даны в виде правил), записывать их в буквенном виде и доказывать. Свойства применяются для упрощения произведений и сокращения дробей.

Система упражнений достаточно обширна и разнообразна и позволяет обратить внимание на некоторые «тонкие» моменты, традиционно приводящие к ошибкам. Так, при умножении степеней учащиеся теряют показатель, равный 1 (ошибка типа $aa^2a^4 = a^6$); ошибаются при определении знака произведения и т. д. Некоторые преобразования должны выполняться автоматически, например, такие, как $(-x)^2 = x^2$.

Обращаем также внимание на упражнения **540**—**542**: нужно добиться определённой беглости при их выполнении, так как в дальнейшем в качестве специального вопроса действия с одночленами не рассматриваются.

В классах с невысоким уровнем подготовки, кроме упражнений из раздела **А**, рекомендуем разобрать ещё задания **548** и **549**.

Комментарий к упражнениям

524—527. Обратить внимание на случаи типа yy^2y^5, когда один из множителей имеет показатель степени, равный 1.

528. а) Можно расписать подробно: $(–x)x^2 = (–1) \cdot x \cdot x^2 = (–1) \cdot x^3 = –x^3$. Но лучше воспользоваться «свёрнутым» правилом определения знака произведения: «минус на плюс дает минус».

б) Заметим, что $(–x)^2 = x^2$. Поэтому $(–x)^2 \cdot x = x^2 \cdot x = x^3$. Можно расписать подробно: $(–x)^2 = (–x) \cdot (–x) = x \cdot x = x^2$.

529. См. пример 2 из учебника. Здесь уместно задать *дополнительный вопрос*: как сократить дробь $\frac{m^2}{m^9}$? Иначе у учащихся может возникнуть неправильный стереотип: при сокращении дроби всегда получается целое выражение.

536. а) *Дополнительный вопрос*: вычислите значение дроби $\frac{3^{12}}{3^{10} \cdot 3^5}$.

540—542. Фактически выполняется умножение одночленов (термин «одночлен» пока употреблять не надо). Уже здесь следует добиваться хороших результатов усвоения материала, так как в последующем он в специальный пункт не выделяется.

540. в) $9x \cdot (–4x^5) = 9 \cdot x \cdot (–4) \cdot x^5 = 9 \cdot (–4) \cdot x \cdot x^5 = –36x^6$.

Это подробное решение, в котором числовые и буквенные множители записываются отдельно. Можно, однако, сразу же разобраться со знаком произведения (плюс на минус даёт минус), а числовые и буквенные множители выписывать уже без знаков. Решение будет таким:

$$9x \cdot (–4x^5) = –9x \cdot 4x^5 = –9 \cdot 4 \cdot x \cdot x^5 = –36x^6.$$

г) $(–4a^2) \cdot (–5a) = –4 \cdot (–5) \cdot a^2 \cdot a = 20a^3$.

Другое решение (сразу же используем правило: «минус на минус даёт плюс»):

$$(–4a^2) \cdot (–5a) = 4a^2 \cdot 5a = 4 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a = 20a^3.$$

547. а) $10^{11} < 11 \cdot 10^{10}$, так как $10 \cdot 10^{10} < 11 \cdot 10^{10}$;

б) $5 \cdot 10^7 = (0{,}5 \cdot 10) \cdot 10^7 = 0{,}5 \cdot 10^8$.

555. б) Например,

$$3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1};$$

$$3^n \cdot 3^n = 3^{n+n} = 3^{2n}.$$

После изучения п. 6.2 второе выражение можно преобразовать по-другому: $3^n \cdot 3^n = (3^n)^2 = 3^{2n}$.

556. а) $\dfrac{5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n}{5^n + 5^n + 5^n + 5^n} = \dfrac{5 \cdot 5^n}{4 \cdot 5^n} = \dfrac{5}{4}$.

6.2. Степень степени, произведения и дроби

Методический комментарий

В этом пункте продолжается изучение свойств степени. В системе упражнений, как и ранее, уделяется внимание действиям с одночленами (задания **575**, **576**). Напомним, что в дальнейшем будет только введён этот термин, а все необходимые умения формируются при изучении свойств степени.

По-прежнему одним из трудных моментов является работа со знаками. Советуем стремиться к употреблению свёрнутых алгоритмов, основанных на правилах знаков при умножении и возведении в степень отрицательных чисел.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно пропустить упражнения **570**, **571**, **576**, **577** (в – е) из раздела **А**. Из раздела **Б** рекомендуем рассмотреть задание **579**, а также при наличии времени задачу-исследование **586**, заполнив первые 2—3 строки таблицы.

Комментарий к упражнениям

570. Сначала раскрыть внутренние скобки, затем внешние:

а) $((x^2)^3)^2 = (x^6)^2 = x^{12}$;

б) $(-(-x)^2)^3 = (-x^2)^3 = -x^6$;

в) $(-(-x)^3)^2 = (-(-x^3))^2 = (x^3)^2 = x^6$;

г) $-((-x)^3)^2 = -(-x^3)^2 = -x^6$.

579. Сначала привести степени к одному основанию.

580. а) $\dfrac{5^2 \cdot 2^4}{10^4} = \dfrac{5^2 \cdot 2^4}{2^4 \cdot 5^4} = \dfrac{5^2}{5^4} = \dfrac{1}{25}$.

Можно вычислить по-другому:

$$\frac{5^2 \cdot 2^4}{10^4} = \frac{(5^2 \cdot 2^2) \cdot 2^2}{10^4} = \frac{10^2 \cdot 2^2}{10^4} = \frac{2^2}{10^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

б) $\dfrac{4^3 \cdot 3^8}{6^7} = \dfrac{(2^2)^3 \cdot 3^8}{(2 \cdot 3)^7} = \dfrac{2^6 \cdot 3^8}{2^7 \cdot 3^7} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

581. в) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50} \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{49} = \left(\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{3}\right)^{49} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$.

582. а) $3^{10} \cdot 5^8 < 15^9$, так как $3^{10} \cdot 5^8 = 3^8 \cdot 5^8 \cdot 3^2 = 15^8 \cdot 9 < 15^8 \cdot 15$;

б) $6^{18} > 2^{20} \cdot 3^{16}$, так как $(2 \cdot 3)^{16} \cdot 6^2 > (2 \cdot 3)^{16} \cdot 2^4$;

в) $81^{10} < 2^{20} \cdot 5^{20}$, так как $81^{10} = (9^2)^{10} = 9^{20}$, а $2^{20} \cdot 5^{20} = (2 \cdot 5)^{20} = 10^{20}$;

г) $49^{15} > 2^{30} \cdot 3^{30}$, так как $49^{15} = (7^2)^{15} = 7^{30}$, а $2^{30} \cdot 3^{30} = (2 \cdot 3)^{30} = 6^{30}$.

583. а) $55^{10} > 5^{20}$, так как $5^{20} = 5^{10} \cdot 5^{10}$, а $55^{10} = 5^{10} \cdot 11^{10}$;

б) $33^{15} > 3^{30}$, так как $33^{15} = 3^{15} \cdot 11^5$, а $3^{30} = 3^{15} \cdot 3^{15}$;

в) $1010^{10} > 10^{30}$, так как $10^{30} = (10^3)^{10} = 1000^{10}$;

г) $10\,001^5 > 99^{10}$, так как $99^{10} = (99^2)^5 < (100^2)^5 < 10\,001^5$.

586. Пусть длина ребра равна n (ед.). Тогда:

1) Число единичных кубиков равно n^3.

2) Количество кубиков, у которых покрашено 3 грани, равно 8. (Это кубики в вершинах куба.)

3) Кубиков, у которых покрашено 2 грани, будет $12 \cdot (n - 2)$. (Вдоль любого ребра куба таких кубиков $(n - 2)$, а рёбер у куба 12.)

4) Кубиков с одной покрашенной гранью будет $6 \cdot (n - 2)^2$. (На каждой грани куба по $(n - 2)^2$ кубика.)

5) Непокрашенных кубиков $(n - 2)^3$. (Представим себе внутреннюю часть данного куба, образующую куб с ребром $(n - 2)$.)

Решая задачу, нужно иметь перед глазами изображение куба, а ещё лучше модель куба, составленного из маленьких кубиков.

6.3. Решение комбинаторных задач

Методический комментарий

С решением комбинаторных задач учащиеся встречались и в 5, и в 6 классах, при этом основным методом решения был перебор всех возможных вариантов; иногда варианты перебирались с помощью специальной схемы — дерева возможных вариантов.

В рассматриваемом пункте основная учебная цель — введение на базе полученного учащимися опыта комбинаторного правила умножения и применение его к решению комбинаторных задач. Это правило формулируется в явном виде, демонстрируются разнообразные ситуации, в которых оно применимо.

Для того чтобы связать новый материал с уже имеющимся опытом, можно начать урок с задачи **587** (а), уменьшив для начала числовые данные: пусть конвертов будет пока не 40, а только 4, марок — не 25, а всего лишь 3. В этом случае можно построить дерево вариантов и с его помощью получить ответ. Опираясь на схему, можно провести и такое рассуждение: есть четыре варианта выбора конверта; на каждый конверт можно наклеить любую из трёх марок; таким образом, всего есть $4 \cdot 3 = 12$ (вариантов покупки конверта с маркой).

Теперь можно вернуться к исходным данным. Получим: $40 \cdot 25 = 1000$ (вариантов).

Решая задачу **587** (б), можно тоже сначала изобразить дерево (хотя бы частично), а затем провести рассуждение. Оно таково: бутерброд выбираем тремя способами; при каждом выборе бутерброда конфету можно выбрать пятью способами, т. е. всего существует $3 \cdot 5$ способов выбора бутерброда и конфеты и т. д. В результате получаем произведение $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

После этого, собственно, можно уже сформулировать правило умножения, подчеркнув, что оно распространяется и на выбор более чем двух элементов. (Мы это видели, решая задачу **587** (б)).

Далее рекомендуем разобрать пример 1 и решить задачи **588** и **589**, а затем — пример 2 (к нему примыкают задачи **592** и **593**). Упражнения **590** и **591** содержат некоторые дополнительные идеи.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться примерами 1 и 2 из объяснительного текста и упражнениями из раздела **А**. При этом советуем в каждом упражнении хотя бы одно задание разобрать в классе. Пример 3 и упражнения из раздела **Б** — для работы с сильными учащимися.

Комментарий к упражнениям

587. а) Для каждого из 40 конвертов можно купить любую из двадцати пяти марок. Значит, всего будет $40 \cdot 25 = 1000$ вариантов покупки.

588. б) $101 \cdot 100 = 10\,100$ вариантов.

589. а) Первый школьник может выбрать любую из 10 парт. При каждом выборе парты первым школьником для второго останется 9 вариантов, т. е. двух школьников можно рассадить $10 \cdot 9$ способами. При каждом из этих способов для третьего школьника остаётся 8 вариантов выбора. Всего имеем $10 \cdot 9 \cdot 8$ способов.

590—591. Рекомендуем в каждом случае сначала привести примеры таких чисел.

590. 1) На первом месте может стоять любая из пяти нечётных цифр. При каждом выборе первой цифры на второе место также можно поставить любую из пяти нечётных цифр. Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что всего существует $5^4 = 625$ чисел.

2) Составляя число из чётных цифр, учитываем, что нуль не может стоять на первом месте. Поэтому о т в е т такой: $4 \cdot 5^3 = 500$ чисел.

3) В качестве первой цифры можно взять любую из девяти цифр (нуль не подходит). Так как вторая цифра уже не может совпадать с первой, то для каждого выбора первой цифры существует девять возможностей выбрать вторую цифру. Для каждого набора из первых двух цифр остается восемь вариантов выбора третьей. Продолжая рассуждения, получаем, что можно составить $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ чисел.

591. 1) Всего можно составить $9 \cdot 10^3$ четырёхзначных чисел. При этом для каждого набора из первых четырёх цифр числа существует пять возможностей выбрать последнюю пятую цифру (0, 2,4, 6, 8).

О т в е т. $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45\,000$ чисел.

2) Поскольку на последнем месте может стоять только одна из двух цифр (0 или 5), то о т в е т будет такой: $9 \cdot 10^3 \cdot 2 = 18\,000$ чисел.

3) Рассуждения аналогичные.

О т в е т. $9 \cdot 10^3 \cdot 1 = 9000$ чисел.

592. а) Каждый из сорока спортсменов сыграл 39 партий. Произведение $39 \cdot 40$ равно удвоенному количеству всех партий. (См. пример 2 из учебника.). Поэтому чтобы получить ответ, его надо разделить на 2. О т в е т: 780 партий.

б) $\dfrac{50 \cdot 49}{2} = 1225$ рукопожатий.

595. Пусть сначала ученики приведут примеры таких последовательностей: орроо, ророр, ооорр, ррррр и т. п. Далее проводятся рассуждения, подобные тем, что приведены в примере 3.

О т в е т. $2^5 = 32$.

596. Так как на месте каждой из восьми цифр могут стоять только нуль или единица (две возможности), то получаем, что наибольшее число символов равно 2^8. Дерево вариантов может быть составлено аналогично предыдущей задаче.

598. Однобуквенных слов всего 26. Двухбуквенных слов можно составить $26 \cdot 26 = 26^2$. Слов, стоящих из трёх, четырёх и пяти букв можно составить соответственно 26^3, 26^4 и 26^5.

Ответ. $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 26^5$.

6.4. Перестановки

Методический комментарий

В пункте даётся специальное название одному из видов комбинаций — *перестановки*. Выводится также формула для вычисления числа перестановок.

Перед тем как применить формулу перестановок, желательно освоиться с понятием факториала. Для этого можно использовать упражнения **599** и **609**.

Важно подчеркнуть, что учащиеся уже решали задачи, суть которых состояла в подсчёте числа перестановок, только термин им был неизвестен и пользовались они не формулой, а рассуждениями, приводящими к применению правила умножения. В связи с этим полезно решить двумя способами, например, задачу **600** (а). Раньше мы рассуждали так: первое место может занять любой из 8 школьников; при этом второе место может занять любой из 7 оставшихся школьников, т. е. для 1 и 2 места существует $8 \cdot 7$ вариантов и т. д. Получаем произведение $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Используя формулу для подсчёта числа перестановок, мы освобождаем себя от необходимости проводить указанные рассуждения; ответом будет то же самое произведение, для которого у нас теперь есть краткое обозначение: $8!$.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться примерами 1 и 2 из объяснительного текста и упражнениями **599**—**601**,

603—**605**. Упражнение **602** интересно в сопоставлении с заданием **606** для сильных учащихся.

Комментарий к упражнениям

602. Так как все буквы в словах различны, то получится всего 6! анаграмм слова «график» и 8! анаграмм слова «интеграл».

604. а) Так как эти числа должны иметь на конце цифру 5, то они отличаются друг от друга только порядком первых четырёх цифр; значит, их 4!, т. е. 24.

б) Из общего количества пятизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, вычтем числа, делящиеся на 5. Получим о т в е т: 5! – 4! = 96.

606. а) В слове «факториал» две буквы «а», все остальные буквы — разные. Временно будем считать различными и буквы «а», обозначив их через «$а_1$» и «$а_2$». Тогда получим 9! разных слов. Однако те слова, которые получаются друг из друга только перестановкой букв «$а_1$» и «$а_2$», на самом деле одинаковые. Поэтому полученные 9! слов разбиваются на пары одинаковых. Значит, всего $\frac{9!}{2}$ анаграмм.

б) В слове «перестановка» две буквы «е» и две буквы «а». Считая все буквы различными, получаем 12! слов. Отождествляя слова, отличающиеся перестановкой только буквы «е», получаем $\frac{12!}{2}$ различных слов. Теперь считаем одинаковыми слова, отличающиеся перестановкой буквы «а». Получаем окончательный о т в е т: $\frac{12!}{2 \cdot 2}$.

в) Из слова «комбинаторика» получится $\frac{13!}{2^4}$ анаграмм, так как в этом слове по два раза встречаются буквы «к», «о», «и», «а».

607. Представим, что у нас только 4 книги одного автора. Их можно поставить на полке 4! способами.

Расставленные в определённом порядке 4 книги одного автора будем теперь считать одной книгой. Добавив к ним остальные 6 книг разных авторов, получим всего 7 книг. Следовательно, для каждого из 4! способов расстановки четырёх книг существует 7! способов расстановки всех книг. Значит, общее количество вариантов равно произведению 4! · 7!.

610. б) Рассмотрим разложение числа 100! на простые множители. Нуль на конце даёт произведение простых чисел 2 и 5. Так как двоек в разложении значительно больше, чем пятёрок, сосчитаем пятёрки.

Чисел, делящихся на 5, среди первых натуральных чисел двадцать. Из них четыре числа (25, 50, 75, 100) имеют в разложении две пятёрки. Таким образом, пятёрок 20 + 4 = 24. Значит, и нулей на конце числа 100! тоже 24.

6.5. Круговые перестановки (*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

Может быть, этот нелёгкий вопрос для учащихся будет нагляднее и проще, если прибегнуть к сюжету из знаменитой басни И. А. Крылова «Квартет». Пусть Мартышку, Козла, Осла и Мишку нужно рассадить за круглым столом, вокруг которого стоят четыре стула под номерами 1, 2, 3 и 4. Если нам важно, кто на каком стуле сидит, то существует 4! способов их расположения за столом.

Далее на этом же сюжете разбираются другие варианты их расположения аналогично тому, как это сделано в учебнике.

Комментарий к упражнениям

612. а, б) Если считать, что карусель состоит из разных предметов, то задачи сводится к подсчёту числа перестановок. Количество вариантов равно 10!.

Если карусель состоит из одинаковых предметов, то безразлично, кто какое место занял. В этом случае нас интересует лишь взаимное расположение приятелей, и вариантов будет $\frac{10!}{10}$ = 9! (Любое расположение приятелей и варианты, получающиеся поворотами, следует считать одинаковыми.)

613. $\frac{12!}{12}$ = 11! способов.

614. Поскольку бусы можно не только поворачивать по кругу, но и переворачивать, различных ожерелий получится $\frac{20!}{20\cdot 2}=\frac{19!}{2}$.

Дополнительные задания

Указания и решения

616. а) $2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}$.

б) $2 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot = 2 \cdot 3^8$, т. е. число нельзя представить в виде степени числа 3.

г) $0{,}1^5 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}1^9$.

621. б) $6^{2m+1} = 6^{2m} \cdot 6 = (6^m)^2 \cdot 6$; если $6^m = a$, то $(6^m)^2 \cdot 6 = 6a^2$.

625. Всего пятизначных чисел из этих цифр без повторения можно составить 5! Среди них тех, в которых на первом месте цифра 7 или 9, будет 2 · 4!

Имеем: 5! – 2 · 4! = 4!(5 – 2) = 3 · 4! = 72 (числа).

631. а) Учитель может сначала предложить привести примеры различных результатов эксперимента. Например, последовательность 6 6 1 5 4 означает, что при первом подбрасывании выпало 6 очков, при втором — тоже 6 очков и т. д. Теперь уже ясно, что задача сводится к подсчёту количества пятизначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (цифры могут повторяться).

Ответ. 6^5.

б) Рассуждаем аналогично.

Ответ: 5^5.

в) Вместо подсчёта результатов, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка, подсчитаем количество результатов, не обладающих нужным свойством. Это как раз те результаты, которые подсчитаны в п. «б». Из общего числа результатов вычтем количество результатов, в которых ни разу не встречается шестёрка.

Ответ: $6^5 - 5^5$.

632. Вместо того чтобы подсчитывать количество требуемых четырёхзначных чисел, определим количество чисел, не обладающих данным свойством. Это числа, записанные только с помощью нечётных цифр. Количество таких чисел 5^4. Всего четырёхзначных чисел $9 \cdot 10^3$.Поэтому количество четырёхзначных чисел, обладающих указанным свойством, равно $9 \cdot 10^3 - 5^4 = 8375$.

Глава 7. Многочлены (16 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
7.1. Одночлены и многочлены 7.2. Сложение и вычитание многочленов 7.3. Умножение одночлена на многочлен	5	О-31, О-32, «*Проверь себя*», П-50, П-51, О-33, О-34, П-1—П-52	160—169 170—180 181—190

7.4. Умножение многочлена на многочлен 7.5. Формулы квадрата суммы и квадрата разности 7.6. Решение задач с помощью уравнений	8	О-35, О-36, «*Проверь себя*», П-52—П-55, О-37—О-39, П-56—П-59	191—197 198—208
Обзор и контроль	3		

Основные цели: выработать умение выполнять действия с многочленами; применять формулы $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ для преобразования квадрата двучлена в многочлен и для обратного преобразования.

Обзор главы. Изучение данный темы опирается на знания, полученные при изучении темы «Введение в алгебру». Используется свойство алгебраических сумм, связанное с перестановкой и группировкой слагаемых, правило раскрытия скобок и правило приведения подобных слагаемых.

Терминами «одночлен» и «многочлен» называются такие алгебраические выражения, с которыми учащиеся, по сути, уже имели дело. Ставится новая задача — приведение многочлена (одночлена) к стандартному виду.

Основное внимание уделяется рассмотрению алгоритмов выполнения действий над многочленами — сложения, вычитания, умножения. Здесь важным теоретическим фактором является вывод о том, что сумму, разность и произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена. В систему упражнений включены задания комбинированного характера, предусматривающие выполнение несколько действий. Однако следует иметь в виду, что на этом этапе основным результатом является овладение собственно алгоритмами действий над многочленами, а преобразованиям целых выражений будет уделено внимание ещё и в дальнейшем.

Учащиеся должны усвоить формулы квадрата суммы и квадрата разности, знать их словесные формулировки, уметь применять эти формулы как для возведения двучлена в квадрат, так и для «сворачивания» трёхчлена в квадрат двучлена. В ходе выполнения упражнений учащиеся встречаются и с другими формулами, например, формулами куба суммы и куба разности, квадрата трёхчлена.

Продолжается формирование умения решать задачи алгебраическим способом с использованием рисунков, схем, которые помогают проанализировать условие задачи, составить план работы с её данными, переводить условие задачи на язык уравнений.

Основные виды деятельности. Выполнять действия с многочленами.

Доказывать формулы сокращённого умножения для двучленов, применять их в преобразованиях выражения и вычислениях. Проводить исследование для конструирования и последующего доказательства новых формул сокращённого умножения.

Решать уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям. Решать текстовые задачи алгебраическим способом: моделировать условие задачи рисунком, чертежом; переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения; решать составленное уравнение.

7.1. Одночлены и многочлены

Методический комментарий

Содержание пункта существенно опирается на знания, полученные учениками при изучении главы 3 «Введение в алгебру». Новыми являются, по сути, только термины: *одночлен, многочлен, одночлен стандартного вида, многочлен стандартного вида.* Это новые названия алгебраических выражений, с которыми они уже имели дело. Знакомые задачи типа «упростите произведение», «упростите сумму» теперь предлагаются в иной формулировке, например «представьте многочлен в стандартном виде». Это следует довести до сознания учащихся, чтобы способствовать осознанному усвоению материала, установлению в их сознании связей с предыдущим.

Сообщив учащимся, что в пункте вводятся новые названия некоторых видов алгебраических выражений, можно затем предложить прочитать его самостоятельно. Текст удобно разбить на три смысловых фрагмента: *понятие одночлена; понятие многочлена; многочлен с одной переменной.*

Обратите внимание на то, что в тексте на примере вводится понятие степени многочлена с одной переменной: это наибольший показатель степени, в которой переменная входит в данный многочлен. Понятие степени многочлена потребуется в дальнейшем, поэтому полезно использовать его при выполнении упражнений.

Для проверки усвоения прочитанного следует после каждого фрагмента текста предлагать вопросы, требующие распознавания введенных понятий, умения иллюстрировать понятие примером и т. д. Вопросы могут быть такими:

1) Какие из выражений являются одночленами:

$5ab$; $\frac{1}{2}c^2d$; $10ab \cdot \left(\frac{2}{5}a^2b\right)$; $a(a + b)$; y^3; $ab + ac$; 7; $6a$; $\frac{3}{a}$; $(-x)^2 \cdot x$?

2) Выражение $3x(x + y)$ — произведение, но его нельзя назвать одночленом. Почему?

3) Приведите пример одночлена, содержащего одну переменную, две переменные, три переменные.

4) Приведите пример многочлена с одной переменной, с двумя переменными. Какова степень предложенного вами многочлена с одной переменной?

5) Почему сумму $ab + \frac{a}{b}$ нельзя назвать многочленом?

6) Запишите какой-нибудь одночлен (многочлен) стандартного вида.

При изучении в предыдущей главе свойств степеней учащиеся фактически выполняли умножение одночленов и возводили одночлены в степень, однако термин «одночлен» не использовался. Если учитель посчитает нужным оттенить этот момент, то может предложить учащимся упражнения такого типа:

1) Представьте произведение одночленов в виде одночлена стандартного вида:

$$-0{,}2x^2y \cdot 5xy^2;\ 0{,}4x^2 \cdot (-5x^2z);\ 2{,}5a \cdot 4a^4;$$

$$cd \cdot (-1{,}5c);\ \tfrac{5}{6}abc \cdot \tfrac{6}{5}ab.$$

2) Выполните возведение одночлена в степень:

$$(3a)^3;\ (-a)^3;\ (-a^3)^2;\ (-5x^2y)^2.$$

3) Представьте в виде одночлена стандартного вида:

$$a^3 \cdot (-3a)^2;\ -(-2a)^2;\ (-a^3)^2;\ -b(-2b)^3.$$

Комментарий к упражнениям

Упражнения к пункту направлены на отработку введённых понятий. Продолжается также отработка вычислительных умений через традиционные для алгебры упражнения — вычисление значений выражений с переменными. Учащиеся часто допускают ошибки, выполняя числовые подстановки, особенно если буквы заменяются отрицательными числами. Поэтому при выполнении упражнений **637**—**640** полезен комментарий, подобный приведённому в учебнике.

642. Пусть сначала учащиеся найдут какую-нибудь сумму двумя способами — непосредственным сложением и по формуле. Это поможет «прочувствовать» содержание задания. Например, пусть $n = 10$. Имеем:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\text{и } \frac{1}{2} \cdot 10^2 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 50 + 5 = 55.$$

Далее при вычислении сумм по формуле запись может быть такой:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = \frac{1}{2} \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 200 + 10 = 210.$$

647. Очень полезное и важное упражнение. Вообще, идее подстановки в курсе уделяется большое внимание. После подстановки выражение нужно упростить (представить его в виде многочлена стандартного вида).

648, **649.** См. замечание к упражнению **642**.

651. б) $\overline{yz} = 10y + z$;

в) $\overline{abc} = 100a + 10b + c$;

г) $\overline{cba} = 100c + 10b + a$;

д) $\overline{mnpq} = 1000m + 100n + 10p + q$;

е) $\overline{qpnm} = 1000q + 100p + 10n + m$.

Дополнительно: сравните выражения в заданиях д) и е).

652. а) $\overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101a$.

б) $\overline{aaa} = 111a = 37 \cdot 3a$.

7.2. Сложение и вычитание многочленов

Методический комментарий

Содержание пункта опирается на умения, сформированные при изучении главы «Введение в алгебру», а именно — на умение менять местами слагаемые в алгебраической сумме, раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «+» или знак «–», приводить подобные слагаемые. Все эти действия выполняются теперь с использованием новой терминологии. Одновременно повторяются изученные ранее правила преобразования алгебраических выражений.

Новым важным моментом является введение понятия противоположных многочленов. Учащиеся должны уметь записать многочлен, противоположный, например, многочлену $x - y$ двумя способами: $-(x - y)$ и $-x + y$.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем, кроме упражнений из раздела **А**, выполнить ещё упражнения **669** и **670**.

Комментарий к упражнениям

660. Задание можно выполнять по-разному. Ученики могут просто подобрать нужный многочлен, т. е. решить задачу «по соображению». В этом случае необходима проверка: сложив данный многочлен и найденный, они могут убедиться, что предложен правильный ответ. Следует также рассмотреть и формальное решение, основанное на правиле отыскания неизвестного слагаемого.

Обозначим искомый многочлен через A, тогда

$$(3a^3 - 2a^2 + 1) + A = 10.$$

Отсюда

$$A = 10 - (3a^3 - 2a^2 + 1) = -3a^3 + 2a^2 + 9.$$

663. Достаточно убедиться, что сумма двучленов равна нулю.

668. Скобки можно расставить, например, так:

б) $x^2 - (3x + 1) - (x^2 - 3x) - 1 = -2$;

в) $x^2 - 3x + 1 - (x^2 - 3x) - 1 = 0$.

Если ученик дал неверный ответ, то его нужно опровергнуть, предложив раскрыть скобки в составленном им выражении. Возможно, это поможет найти правильное решение.

671. Лучше начать с поиска пар равных выражений: $2x - 3y$ и $-(3y - 2x)$; $3y - 2x$ и $-(2x - 3y)$. Можно записать соответствующие равенства:

$$2x - 3y = -(3y - 2x);\ 3y - 2x = -(2x - 3y).$$

Далее выписываем пары противоположных выражений: $2x + 3y$ и $-2x - 3y$; $2x - 3y$ и $3y - 2x$; $-(2x - 3y)$ и $-(3y - 2x)$. Можно задать вопрос: как записать на математическом языке утверждение: «выражения $2x + 3y$ и $-2x - 3y$ — противоположны»? Ответ может быть дан в виде: $A = -B$, или $B = -A$, или $A + B = 0$. Для указанной пары выражений имеем: $2x + 3y = -(-2x - 3y)$, или $-2x - 3y = -(2x + 3y)$, или $(2x + 3y) + (-2x - 3y) = 0$.

Это достаточно трудное задание, и можно ограничиться лишь указанием пар равных выражений и противоположных выражений.

672. Можно предложить учащимся представить данный многочлен в виде разности двух многочленов двумя-тремя способами. А желающие могут найти все возможные варианты. Для самоконтроля можно сказать, что таких вариантов шесть.

$2a^3 - 3a^2 - 4a + 5 = (2a^3 - 3a^2) - (4a - 5)$;

$2a^3 - 3a^2 - 4a + 5 = (2a^3 - 4a) - (3a^2 - 5)$;

$2a^3 - 3a^2 - 4a + 5 = (2a^3 + 5) - (3a^2 + 4a)$;

$2a^3 - 3a^2 - 4a + 5 = (-3a^2 - 4a) - (-2a^3 - 5)$;

$2a^3 - 3a^2 - 4a + 5 = (-3a^2 + 5) - (-2a^3 + 4a)$;

$2a^3 - 3a^2 - 4a + 5 = (-4a + 5) - (-2a^3 + 3a^2)$.

673. а) Желательно рассмотреть разные ответы. Например,

$x^2 + 3x - 1 = (x^2 + 2x) + (x - 1) = (3x^2 - 1) + (3x - 2x^2)$;

$x^2 + 3x - 1 = (x^2 + 2x) - (1 - x) = (3x^2 + 3x) - (2x^2 + 1)$.

674. Задание может быть выполнено разными способами.

Способ 1. Воспользуемся способом «прибавить — вычесть». Прибавим u к выражению $t - s$ и вычтем из него u:

$t - s = t - s + u - u = (t - u) + (u - s) = 18 + 13 = 31$.

Значит, $s - t = -31$.

Способ 2. Можно сложить левые и правые части данных равенств. Получим

$(t - u) + (u - s) = 18 + 13$, т. е. $t - s = 31$. Отсюда $s - t = -31$.

Способ 3. Выразим из каждого равенства u: $u = t - 18$, $u = 13 + s$. Отсюда $t - 18 = 13 + s$, $t - s = 31$ и $s - t = -31$.

676. Воспользоваться способом «прибавить — вычесть».

678. в) $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba} = (100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = 222a + 222b + 222c$.

Сложение здесь удобно выполнять «в столбик».

7.3. Умножение одночлена на многочлен

Методический комментарий

Нужно уделить достаточное внимание заданиям базового уровня (см. раздел «*Чему вы научились*»). Не следует спешить с переходом к «свёрнутым» записям, предполагающим выполнение промежуточных действий в уме. Развёрнутое решение (см. пример 1 в учебнике) поможет предупредить возможные ошибки, выработать правильный алгоритм действия. И при развёрнутой, и при свёрнутой записи нужны словесные комментарии типа: «минус на плюс даёт минус».

Полезно обратить внимание учащихся на то, что многочлен, полученный в результате умножения одночлена на многочлен, содержит столько же членов, сколько и данный многочлен. Это поможет не терять слагаемые.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться заданиями из раздела **А**.

Комментарий к упражнениям

695. б) Полезно подкрепить утверждение конкретным примером, затем провести доказательство в общем виде: $(v + a)$ км/ч — скорость лодки по течению; $(v - a)$ км/ч — скорость лодки против течения; $2(v + a) - 2(v - a)$ км — на столько лодка не доплыла до пристани. Раскрыв скобки, получаем выражение 4*a*, значение которого не зависит от значения собственной скорости лодки.

698—700. Новая для учащихся постановка вопроса. Выражение надо преобразовывать таким образом, чтобы можно было воспользоваться указанным условием.

698. а) В левой части равенства нужно выделить сумму $a + b + c$:

$$a(bc - 1) + b(ac - 1) + c(ab - 1) = abc - a + abc - b + abc - c =$$
$$= 3abc - (a + b + c).$$

Если $a + b + c = 0$, то $3abc - (a + b + c) = 3abc$.

700. Задание трудное. Доказательство основано на утверждении: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$, и наоборот, если $ad = bc$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

а) Из условия следует, что $ad = bc$. Мы получим нужную пропорцию, если докажем, что $(a + b)d = (c + d)b$, т. е. что $ad + bd = bc + bd$. Из сопоставления равенств $ad = bc$ и $ad + bd = bc + bd$ становится ясной идея доказательства. Проведем его.

Известно, что $ad = bc$ — верное равенство. Прибавим к обеим его частям одно и то же число bd. Получим верное равенство $ad + bd = bc + bd$. Значит, $(a + b)d = (c + d)b$. Отсюда имеем пропорцию

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

в) Из условия следует, что $ad = bc$. Прибавив к обеим частям равенства число ab, получим $ab + ad = ab + bc$, т. е. $a(b + d) = b(a + c)$. Отсюда имеет пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$. Переписав пропорцию справа налево, получим: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

701. в) Введём замену: $a^2 + 3a + 2 = x$. Тогда

$a^2 + 3a + 1 = x - 1$, $a^2 + 3a - 1 = x - 3$.

Имеем: $3ax - 4a(x-1) + 2a(x-3) = 3ax - 4ax + 4a + 2ax - 6a = ax - 2a =$
$= (a^2 + 3a + 2)a - 2a = a^3 + 3a^2.$

При $a = -5$ значение выражения равно –125 + 75 = –50.

7.4. Умножение многочлена на многочлен

Методический комментарий

Алгоритм умножения многочлена на многочлен рассматривается на примере умножения двух двучленов. При этом используется уже знакомый учащимся приём замены. Целесообразность подстановки $a + b = x$ учащимся должна быть понятна: в результате удается заменить произведение многочленов произведением одночленов и многочлена.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что произведение двух многочленов — это многочлен, число членов которого равно произведению числа членов одного многочлена на число членов другого из данных многочленов.

В классах с невысоким уровнем подготовки следует ограничиться упражнениями из раздела **А**, сосредоточив основное внимание на заданиях **702**—**704**, **710**, **711** соответствующих обязательным требованиям.

Комментарий к упражнениям

Главная цель этого пункта — формирование умения умножать многочлен на многочлен. Именно этому и посвящена основная часть упражнений. В то же время в систему упражнений включены задания, требующие применения полученных навыков преобразований (**711**, **713**, **717**, **719**, **721)**.

718. а) Можно решить задачу «в лоб»: преобразовать в многочлен стандартного вида отдельно левую и правую части равенства и убедиться, что получилось одно и то же выражение.

Однако существует более красивое решение. Получим из левой части равенства правую:

$$(a + b)((a + b + c) + c) = (a + b)(a + b + c) + (a + b)c =$$
$$= (a + b)(a + b + c) + ac + bc.$$

Учителю следует взять это упражнение на заметку. К нему можно вернуться при изучении главы 8 «Разложение многочленов на множители» и предложить учащимся получить из правой части равенства левую:

$$(a + b)(a + b + c) + ac + bc = (a + b)(a + b + c) + c(a + b) =$$
$$= (a + b)\,(a + b + 2c).$$

б) Перемножить многочлены в правой части. Главное — не ошибиться в выкладках.

720. б) $(n^2 - 7n + 6)(n^2 - 7n - 3) - (n^2 - 7n + 12)(n^2 - 7n + 1)$; далее ввести замену: $n^2 - 7n = y$.

723. Равное произведение получится в том случае, если или две, или четыре скобки заменить на противоположные выражения. Этот вывод можно использовать при выполнении следующего задания.

724. Непосредственным умножением преобразовать в многочлен нужно только первое произведение. Чтобы представить в виде многочлена остальные произведения, достаточно каждое из них сравнить с первым и выяснить, равно ли оно первому или противоположно ему.

Имеем:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24;$$
$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(4 - x) = -x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 24;$$
$$(1 - x)(x - 2)(x - 3)(4 - x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24;$$
$$-(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = -x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 24.$$

Чтобы представить в виде многочлена произведение $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$, можно перемножить первые два и последние два двучлена, а затем перемножить два трёхчлена.

Заметим, что если перемножить крайние и средние двучлены, то получится произведение

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6).$$

Далее можно воспользоваться заменой: $x^2 - 5x = y$. Такой способ целесообразен после знакомства с формулой квадрата двучлена, тогда преобразования будут совсем простыми.

7.5. Формулы квадрата суммы и квадрата разности

Методический комментарий

Обращаем внимание на то, что в учебнике формулы сокращённого умножения не выделены в отдельную главу. Они распределены между главами «Многочлены» и «Разложение многочленов на множители».

Кроме того, важно иметь в виду, что формулы $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ в этом пункте применяются в обе стороны — и для возведения в квадрат, и для сворачивания трёхчлена в квадрат двучлена. Каждую из формул учащиеся должны уметь записать и прочитать и слева направо, и справа налево. Обратите внимание на пример 3 в учебнике. Учащиеся должны понять, что трёхчлен $a^2 - 2ab + b^2$ может быть представлен в виде квадрата двучлена двумя способами: как $(a - b)^2$ и как $(b - a)^2$. Этот навык им будет очень полезен в дальнейшем.

Формулы квадрата суммы и квадрата разности (и их словесные формулировки) учащиеся должны запомнить. Однако к этому результату они могут прийти постепенно в результате неоднократного их применения. В начале изучения темы целесообразно вывесить плакат с формулами и разрешать учащимся прибегать к нему в случае необходимости.

При выработке навыков следует прежде всего добиваться уверенного выполнения таких заданий, как **727**, **732**, **735** — они соответствуют обязательным результатам обучения.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно отказаться от выполнения заданий **729** (д, е), **736** из раздела **А**. В то же время рекомендуем обратить внимание на упражнения **740**, **747**, **748** из раздела **Б**.

Комментарий к упражнениям

725. Подобные упражнения на запись и чтение выражений полезно предлагать учащимся и в дальнейшем.

747—748. В хорошо подготовленном классе можно посоветовать учащимся запомнить рассмотренные формулы.

756. а) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2$, откуда $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 6{,}25 - 2 =$ $= 4{,}25$.

7.6. Решение задач с помощью уравнений

Методический комментарий

Полученные учащимися навыки преобразования выражений и применения их к решению уравнений позволяют решать несколько более сложные в техническом отношении задачи. Одновременно важный аспект этого пункта — продвижение в обучении стратегиям решения текстовых задач. Здесь явным образом делается акцент на такой важный приём, как моделирование условий задач с помощью рисунков, чертежей, схем. «Рисунок помогает решить задачу» — важное правило, которое целесообразно довести до сознания учащихся.

Схема и рисунки делают условие задачи наглядным, «осязаемым» и облегчают процесс составления уравнения. Рассмотрим, например, нелёгкую для учащихся задачу **800** из раздела «Дополнительные задания». Стоит нарисовать круговую дорожку, отметить точку встречи, показать стрелками направления движения и отметить место новой встречи, как сразу же станет ясно, что сумма расстояний, которые пробежали спортсмены, составляет полный круг (рис. 9).

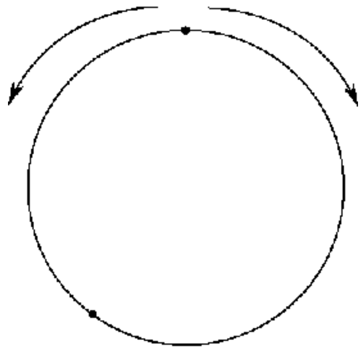

Рис. 9

Не нужно навязывать учащимся стереотипы выполнения рисунков. Работа над рисунком должна быть организована как индивидуальный процесс анализа задачи. Хорошо, если перед решением задачи в классе каждый ученик получит возможность прочитать условие, разобраться в нём и самостоятельно сделать рисунок. Удачный рисунок можно изобразить на доске. После такой предварительной работы над задачей участие в коллективном её решении будет более эффективным.

К пункту предложено довольно много упражнений. В ряде случаев можно ограничиться составлением уравнения по условию задачи. Задачи из раздела **Б** сложные, они предназначены для работы с сильными учащимися.

Комментарий к упражнениям

769. Расстояние, равное 20 км, между автомобилем и мотоциклом будет дважды. Первый раз до встречи, когда они вместе пройдут 220 км, и второй раз после встречи, когда вместе они пройдут 260 км.

770. Пусть расстояние, равное 10 км, будет между автобусом и автомобилем через x ч после выезда автомобиля. Таким образом, автомобиль ехал x ч, а автобус — $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ ч. Имеем уравнение $45\left(x+\frac{1}{3}\right)-60x=10.$

771. Из условия следует, что в тот момент, когда автомобиль проезжает мимо бензоколонки, расстояние между ним и мотоциклистом составляет 40 км.

Способ 1. Пусть автомобиль, двигаясь от бензоколонки, догонит мотоциклиста через x ч. Тогда мотоциклист проедет за это время $40x$ км, а автомобиль — $90x$ км. Имеем уравнение $90x - 40x = 40.$ Отсюда $x = \frac{5}{4}.$

Теперь найдём искомое расстояние. Так как автомобиль ехал $\frac{4}{5}$ ч со скоростью 90 км/ч, то это расстояние равно $90 \cdot \frac{4}{5} = 72$ (км).

Способ 2. Пусть автомобиль проехал от бензоколонки до того момента, как он догнал мотоциклиста, x км. Так как мотоциклист уехал от бензоколонки на 40 км, то он проехал за это же время $(x - 40)$ км. Имеем уравнение: $\frac{x-40}{40} = \frac{x}{90}.$ Откуда получаем, что $x = 72$.

772. Здесь удобно обозначить через x время (в ч), которое автомобиль затратил на первую половину пути. Имеем уравнение:

$$60x = 80\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

774. Пусть скорость пешехода равна x км/ч, тогда скорость велосипедиста равна (x + 10) км/ч. С помощью рисунка 10 легко понять, что сумма расстояний, преодолённых пешеходом и велосипедистом до их встречи, равна удвоенному расстоянию от A до B. Получаем уравнение

$$x \cdot \frac{2}{5} + (x + 10) \cdot \frac{2}{5} = 8.$$

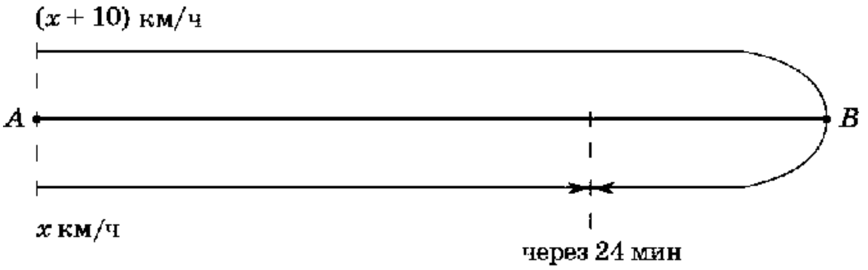

Рис. 10

778. Здесь все размеры надо выразить в дециметрах, так как 1 л = 1 дм^3.

Пусть одна из сторон дна меньшего аквариума равна x дм, тогда другая его сторона равна $(x+1,6)$ дм, а стороны дна большего аквариума равны $(x+0,4)$ дм и $(x+2)$ дм.

Каждый аквариум заполняется водой на 3 дм по высоте. Значит, объём воды в меньшем аквариуме равен $3x(x+1,6)$ дм^3, а в большем он равен $3(x+0,4)(x+2)$ дм^3. Получаем уравнение

$$3(x+0,4)(x+2)-3x(x+1,6)=6.$$

779. Пусть x – число открытий калитки, в результате которого цистерна наполняется полностью, тогда объём цистерны равен $2x$ л. Составляем уравнение

$$20x=25(x-12).$$

780. Обозначим буквой x число отработанных дней, тогда неотработанных дней было 30 – x. Приходим к уравнению

$$48x-12(30-x)=0.$$

7.7. Деление с остатком (*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

О делении с остатком учащиеся знают уже с начальной школы, ещё раз они возвращались к этому вопросу при изучении темы «Делимость» в курсе 5 класса. Поэтому теоретические сведения, изложенные в объяснительном тексте, не несут принципиально новой информации: они обобщают, приводят в систему то, о чём учащиеся уже имеют представление.

Упражнения к пункту выстроены по принципу нарастания сложности, и в основном они не трудны (кроме, может быть, заданий **788—790**). Для решения практически всех задач нужно знать только формулу, связывающую делимое и делитель при делении с остатком: $a = bq + r$, где a и b — натуральные числа, q — неполное частное, r — остаток ($r < b$).

Комментарий к упражнениям

781. Так как при делении на 2 возможны только два остатка: 0 и 1, то множество целых неотрицательных чисел по остаткам от деления на 2 разбивается на два класса: это числа вида $2n$ и числа вида $2n + 1$. Иными словами, это классы чётных и нечётных чисел.

Классы по остаткам от деления на 5: $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 4$.

Классы по остаткам от деления на 8: $8n$, $8n + 1$, $8n + 2$, ..., $8n + 7$. Всего их восемь.

783. а) $a = 10m + 1$, $b = 10n + 3$, $c = 10k + 5$; поэтому $a + b + c = (10m + 1) + (10n + 3) + (10k + 5) = 10(m + n + k) + 9$, т. е. остаток от деления суммы на 10 равен 9.

784. а) $a = 7n + 3$, $b = 7k + 4$; $a + b = 7(n + k) + 7$; каждое слагаемое суммы $a + b$ делится на 7, значит, эта сумма делится на 7;

б) $a = 6n + 1$, $b = 6k + 3$; $a + b = 6(n + k) + 4$; так как в правой части равенства каждое слагаемое делится на 2, то сумма $a + b$ — число чётное.

785. $a = cq + r$, $b = cp + r$; $a - b = c(q - p) + 0$; остаток от деления $a - b$ на c равен 0, значит, $a - b$ делится на c.

786. $a = 3q + 1$, $b = 3p + 1$; $ab = (3q + 1)(3p + 1) = 9pq + 3p + 3q + 1 = 3(3pq + p + q) + 1$. Утверждение доказано.

787. При делении на 3 каждого из чисел a и b в остатке получается либо 1, либо 2. Если получаются одинаковые остатки, то на 3 делится их разность (см. упражнение **785**). Если же остатки различны, то на 3 делится их сумма.

788. Из условия следует, что эти числа не делятся на 6; кроме того, при делении на 6 в остатке не должны получаться числа 2, 3 и 4. Таким образом, это числа вида $6k + 1$ и $6k + 5$, где $k = 0, 1, 2\ldots$

789. а) Если число не делится на 5, то оно может быть представлено в виде $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$. Далее каждое из этих выражений возводим в квадрат:

$$(5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2 + 2k) + 1,$$

т. е. на 5 делится квадрат числа, уменьшенный на 1; и т. д.

б) $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$; слагаемое $4n(n + 1)$ делится на 4 и на 2 (так как $n(n + 1)$ — произведение двух последовательных натуральных чисел), значит, оно делится на 8; таким образом, квадрат нечётного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

Дополнительные задания к главе 7

Указания и решения

793. $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+5=5(n^2+1).$

795. Преобразование удобно выполнять по действиям.

в) 1) $(b+c)^2-(b^2+c^2)=2bc$;

2) $(2bc)^3-(3bc)^3=19b^3c^3$.

е) $(y+z)^3-(y^3+z^3)=3y^2z+3yz^2$;

$(3y^2z+3yz^2)^2-18y^3z^3=9y^4z^2-9y^2z^2$.

798. Пусть x км/ч — первоначальная скорость велосипедиста. Имеем уравнение

$$x\cdot 1+(x+2)\cdot 2=40.$$

Ответ. 12 км/ч.

800. Сумма расстояний, которые спортсмены пробегут от первой до второй встречи, составляет полный круг, т. е. 1000 м. Пусть x мин — время, которое пройдет от их первой встречи до второй. Получим уравнение

$$140x + 160x = 1000.$$

Это уравнение следует упростить. Имеем

$$7x + 8x = 50.$$

803. Пусть две автоматические линии работали вместе x ч. Имеем уравнение

$$70 \cdot 2 + (70 + 100) \cdot x = 650.$$

О т в е т. Первая линия работала 5 ч, вторая — 3 ч.

810. Пусть в классе присутствует x учеников, тогда отсутствует $\frac{1}{5}x$ учеников. Имеем уравнение

$$\frac{1}{5}x + 1 = \frac{1}{4}(x - 1).$$

Глава 8. Разложение многочленов на множители (16 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	**Число уроков**	**Дидактические материалы**	**Рабочая тетрадь**
8.1. Вынесение общего множителя за скобки 8.2. Способ группировки	5	О-40, О-41, П-60, П-61	209—225 226—230
8.3. Формула разности квадратов 8.4. Формулы разности и суммы кубов	3	О-42, О-43, П-62, П-63	231—240 241—247

8.5. Разложение на множители с применением нескольких способов 8.6. Решение уравнений с помощью разложения на множители	5	О-44, О-45, «*Проверь себя*», П-64, П-65	248—250
Обзор и контроль	3		

Основные цели: выработать умение выполнять разложение многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки и группировкой, а также с применением формул сокращённого умножения.

Обзор главы. В учебнике вопрос о разложении многочленов на множители выделен в отдельную главу. Сюда же отнесено знакомство с формулами разности квадратов, а также разности и суммы кубов. Обращаем внимание на то, что большее значение здесь, безусловно, придаётся формуле разности квадратов. Она должна использоваться как для разложения на множители, так и для умножения разности двух выражений на их сумму.

В ходе изучения темы учащиеся знакомятся с двумя приёмами преобразования многочленов, позволяющими в ряде случаев разложить многочлен на множители. Это разбиение одного из членов многочлена на два или более слагаемых, а также приём, который может быть условно назван «прибавить — вычесть».

Подчеркнём, что разложение на множители весьма сложный для усвоения вопрос, и здесь особенно важно дифференцированно подходить к требованиям, предъявляемым к учащимся по овладению этим материалом.

В ходе изучения темы продолжается формирование умений сокращать дроби. Кроме того, учащиеся знакомятся с приёмом решения уравнений на основе условия равенства произведения нулю.

Основные виды деятельности. Выполнять разложение многочленов на множители, применяя различные способы; анализировать многочлен и распознавать возможность применения того или иного приёма разложения его на множители. Применять различные формы самоконтроля при выполнении преобразований.

Применять разложение на множители к решению уравнений.

8.1. Вынесение общего множителя за скобки

Методический комментарий

Разложение многочленов на множители вынесением общего множителя за скобки — это тот приём, которым должны овладеть все учащиеся. В принципе с этим преобразованием школьники встречались уже неоднократно, и сам оборот речи «вынесение общего множителя за скобки» им должен быть знаком. Так, при изучении в 5 классе распределительного свойства предлагалось, например, рациональным способом вычислить сумму 17 · 12 + 43 · 12. (Конечно, в 5 классе умение выполнять подобные преобразования не считалось обязательным.) В начале курса 7 класса вынесение общего множителя за скобки использовалось при обосновании алгоритма приведения подобных слагаемых. На этот опыт учащихся можно опереться.

Упражнения в пункте различны по сложности.

Упражнение **811** подготовительное; оно имеет вспомогательный характер и может быть выполнено до рассмотрения теоретического материала. Полезно, чтобы при его выполнении учащиеся имели перед глазами «картинку» $ab + ac = a(b + c)$. Обязательным результатам обучения по данной теме соответствуют упражнения **812—822.** В них включены и задания на сокращение алгебраических дробей. В то же время следует иметь в виду, что основной этап изучения алгебраических дробей — это 8 класс. В классах с невысоким уровнем подготовки из упражнений раздела **Б** целесообразно разобрать задания **829**—**831** в качестве подготовки к изучению разложения на множители с помощью группировки.

Полезно приучить учащихся после вынесения общего множителя за скобки мысленно выполнить обратное действие — умножение одночлена на многочлен. Такой приём самоконтроля поможет избежать многих ошибок.

Для учащихся всегда труден случай вынесений за скобку общего множителя в выражениях типа $a + ab$. Для предупреждения ошибок в подобных случаях рекомендуем перед вынесением общего множителя за скобку каждый член многочлена представлять в виде произведения; например, $a + ab = a \cdot 1 + ab = a(1 + b)$. Так следует поступать довольно долго, пока у учеников не будет выработан твёрдый навык.

Целесообразно обратить внимание учащихся на то, что при вынесении общего множителя за скобки в оставшейся в скобках сумме должно оказаться столько слагаемых, сколько их было в исходном многочлене. Это ещё один приём самоконтроля.

Комментарий к упражнениям

826. а) 21 · (12 + 14) + 26 · 79 = 21 · 26 + 26 · 79 = 26 · 100 = 2600.

828. а) Надо подчеркнуть идею доказательства: постараемся представить сумму в виде произведения, в котором один из множителей равен 7. Имеем: $6^4 \cdot (6+1)$.

833. а) $\frac{n}{mn-n^2} = \frac{n}{n(m-n)} = \frac{1}{m-n}$; если $m-n=\frac{3}{4}$, то $\frac{1}{m-n} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$;

б) $\frac{m}{mn-m^2} = \frac{m}{m(n-m)} = \frac{1}{n-m}$; если $m-n=\frac{3}{4}$, то $n-m=-\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{n-m} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$;

в) $\dfrac{n^2-2mn+m^2}{3m-3n}=\dfrac{(n-m)^2}{3(m-n)}=\dfrac{(m-n)^2}{3(m-n)}=\dfrac{m-n}{3}$; если $m-n=\dfrac{3}{4}$, то $\dfrac{m-n}{3}=\dfrac{1}{4}$.

835. Полезно в каждом случае начать с конкретного примера. Следует также убедиться, что учащиеся могут записать в общем виде два последовательных натуральных числа, квадрат произвольного натурального числа и т. д.

а) $n^2-n=n(n-1)$; одно из двух последовательных натуральных чисел n и $n-1$ — чётное, поэтому и произведение $n(n-1)$ — число чётное;

б) $2^n+2^{n+1}=2^n\cdot(1+2)=2^n\cdot 3=2\cdot 2^{n-1}\cdot 3=6\cdot 2^{n-1}$;

в) $n^m+n^{m+1}=n^m(1+n)$; натуральное число $n+1$ — следующее за натуральным числом n.

8.2. Способ группировки

Методический комментарий

Разложение на множители способом группировки традиционно трудно для учащихся. Всех научить этому обычно не удаётся. Поэтому степень проработки данного вопроса определяет учитель в зависимости от возможностей класса и числа уроков, которые могут быть отведены на эту тему. В слабых классах можно ограничиться разбором упражнения раздела **А** (не включая подобные задания в обязательную часть контрольной работы).

Возможно, что выбранная учеником группировка не приведёт к нужному результату. Это естественный поиск, и ученик должен иметь право начать решение заново, сгруппировав слагаемые иначе.

Комментарий к упражнениям

838. В каждом случае возможны два способа группировки.

844. Можно группировать как по два, так и по три слагаемых.

846. Представить в виде:

б) $(c^2 - cb) - (3cb - 3b^2)$;

в) $(b^2 + 2b) + (3b + 6)$;

г) $(c^2 - 4c) - (3c - 12)$.

8.3. Формула разности квадратов

Методический комментарий

Особенность пункта состоит в том, что здесь формула $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ сразу же работает в двух направлениях: и как формула для разложения на множители разности квадратов, и как формула сокращённого умножения суммы двух выражений на их разность.

Для разложения двучлена $a^2 - b^2$ на множители использован приём «прибавить — вычесть». Этот приём чрезвычайно полезен; он важен в идейном плане, поэтому каждый ученик должен с ним познакомиться хотя в ходе вывода формулы разности квадратов.

Формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ учащиеся могут запомнить в процессе её применения, на первых порах целесообразно вывесить плакат с этой формулой или написать её на доске. Тогда главный акцент будет сделан не на извлечение из памяти ещё плохо усвоенного факта, а на распознавание ситуации, в которой эта формула может сработать.

При выполнении первых упражнений на разложение на множители по формуле разности квадратов полезно каждый член двучлена письменно представлять в виде квадрата некоторого выражения (а с некоторыми учащимися это придется делать достаточно долго). В случае применения этой формулы к произведениям типа $(b+c)(c-b)$ нужно посоветовать учащимся ориентироваться на ту скобку, в которой записана разность, а при необходимости переписывать разность в виде $(c-b)(c+b)$.

В слабом классе можно ограничиться заданиями раздела **А**, при наличии времени решить упражнения **865, 867**,**868** из раздела **Б**.

Комментарий к упражнениям

861. Естественно сначала применить формулу, а затем умножить на одночлен.

865. а) Возьмём числа n и n +1. Составим и преобразуем разность их квадратов:

$$(n+1)^2-n^2=(n+1-n)(n+1+n)=2n+1.$$

Утверждение доказано, так как $n+(n+1)=2n+1.$

б) $(2n+2)^2-(2n)^2=(2n+2-2n)(2n+2+2n)=2(4n+2)=8n+4;$

$$2(2n+(2n+2))=2(4n+2)=8n+4.$$

Утверждение доказано.

866. Возьмём три последовательных натуральных числа, обозначив первое число буквой *n*: $n,\ n+1,\ n+2.$Покажем, что $n(n+2)=(n+1)^2-1.$

Имеем

$n(n+2)=n^2+2n;$

$(n+1)^2-1=n^2+2n+1-1=n^2+2n.$

Если буквой n обозначить среднее число, то имеем $n-1,\ n,\ n+1$ и тогда получим, что $(n-1)(n+1)=n^2-1$.

870. В каждом случае преобразовать выражение следующим образом:

а) $((a+b)-c)((a+b)+c);$

б) $(x+(y-z))(x-(y-z));$

в) $(a^2+(2a-1))(a^2-(2a-1));$

г) $((x^2+2)-2x)((x^2+2)+2x)$.

8.4. Формулы разности и суммы кубов

Методический комментарий

Материал этого пункта не входит в содержание образования по математике Поэтому среди обязательных результатов обучения (раздел «*Чему вы научились*») нет заданий на применение формулы разности и суммы кубов. В слабом (коррекционном) классе этот материал вообще можно опустить.

С сильными учащимися этот материал следует рассмотреть обязательно. Вывод формул, который дан в этом пункте, можно предложить им выполнить самостоятельно. Одновременно полезно предложить ученикам пункт 8.7 учебника («*Для тех, кому интересно*»), где одна из этих формул получена с помощью приёма «прибавить — вычесть».

Не обязательно требовать от всех учащихся запоминания рассматриваемых формул. Во время выполнения упражнений к пункту они могут быть записаны на доске.

Полезно предложить задания, в которых нужно распознать, к каким из произведений применимы формулы:

$(c+d)(c^2-cd+d^2)$; $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$;
$(a+1)(a^2-a+1)$; $(m-n)(m^2+mn-n^2)$;
$(x-1)(x^2+x+1)$; $(3b-1)(9a^2+3b+1)$;
$(a-b)(a^2-ab+b^2)$.

Комментарий к упражнениям

882. Задание а) можно рассматривать как образец решения.

а) $(m+1)(m^2-m+1)+3)=(m+1)(m^2-m+1)+3(m+1)=$
$=(m^3+1)+(3m+3)=m^3+3m+4$;

б) $(x+1)(x^2-x+1+6)=(x+1)(x^2-x+1)+6(x+1)=$
$=(x^3+1)+(6x+6)=x^3+6x+7;$

в) $(a+b)(a^2-ab+b^2-2ab)=(a+b)(a^2-ab+b^2)-2ab(a+b)=$
$=a^3+b^3-2a^2b-2ab^2;$

г) $(p-q)(p^2+pq+q^2+2pq)=p^3-q^3+2pq(p-q)=$
$=-p^3-q^3+2p^2q-2pq^2.$

883. Все задания в этом упражнении разные, поэтому желательно, чтобы сильный ученик выполнил их все, найдя в каждом случае свой «ключик».

а) $(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)=(a^2)^3-(b^2)^3=a^6-b^6;$

б) $(x^2-1)(x^2+1)(x^8+x^4+1)=(x^4-1)(x^8+x^4+1)=(x^4)^3-1=x^{12}-1;$

в) $\left((x-y)(x^2+xy+y^2)\right)\left(x+y)(x^2-xy+y^2\right)=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=x^6-y^6;$

г) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2=\left((a+b)(a^2-ab+b^2)\right)\left((a+b)(a^2-ab+b^2)\right)=$
$=(a^3+b^3)^2=a^6+2a^3b^3+b^6.$

8.5. Разложение на множители с применением нескольких способов

Методический комментарий

Материал пункта сложен уже тем, что из многообразия изученных приёмов в каждом конкретном случае требуется выбрать подходящий; кроме того, в ходе преобразования выражения воспользоваться не одним, а двумя-тремя способами разложения на множители. Поэтому чрезвычайно полезны общие рекомендации, сформулированные в объяснительном тексте. Для учащихся это своего рода руководство к действию. Они должны следовать ему, «проговаривая» соответствующие шаги вслух или про себя. Например: «Проверяю, есть ли общий множитель», или: «Это трёхчлен. Посмотрим, нельзя ли его свернуть в квадрат двучлена».

В объяснительном тексте рассмотрены четыре примера. Все они различны и демонстрируют основные идеи, заложенные в системе упражнений учебника. Эти примеры не следует разбирать на одном уроке, так как каждую идею необходимо осознать, потренироваться в выполнении аналогичных заданий.

В слабом классе рекомендуем ограничиться примером 1 и упражнениями из раздела **А**.

Комментарий к упражнениям

893. Решается после рассмотрения примера 3 из учебника. Это упражнение сложное даже для хорошо подготовленных учеников. В каждом задании «спрятан» квадрат двучлена.

г) $9a^4+6a^2c+c^2-9=\left((3a^2)^2+2\cdot 3a^2\cdot c+c^2\right)-9=(3a^2+c)^2-3^2=$
$=(3a^2+c+3)(3a^2+c-3)$;

д) $ma^2-m^3-2m^2-m=m(a^2-m^2-2m-1)=m(a^2-(m+1)^2)=$
$=m(a-m-1)(a+m+1)$;

е) $4x^5+4x^3y+xy^2-4x=x(4x^4+4x^2y+y^2-4)=x\left((2x^2)^2+2\cdot 2x^2y+y^2-4\right)=$
$=x\left((2x^2+y)^2-2^2\right)=x(2x^2+y+2)(2x^2+y-2)$.

896. а) $a^2+4a-5=a^2+2\cdot 2a+4-4-5=(a+2)^2-9=$
$=(a+2-3)(a+2+3)=(a-1)(a+5)$.

После разложения на множители полезно выполнить проверку умножением (желательно устно).

897. а) Способ 1.

$(1+ab)^2-(a+b)^2=(1+ab-a-b)(1+ab+a+b)=$
$=((1-b)-a(1-b))((1+a)+b(1+a))=(1-b)(1-a)(1+a)(1+b)$.

Способ 2.

$(1+ab)^2-(a+b)^2=1+2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2=(1-a^2)-b^2(1-a^2)=$
$=(1-a^2)(1-b^2)=(1-a)(1+a)(1-b)(1+b)$.

898. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1).$ Из трёх последовательных натуральных чисел одно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2, значит, это произведение делится на 6. Желательно проиллюстрировать доказанное утверждение числовым примером.

8.6. Решение уравнений с помощью разложения на множители

Методический комментарий

В этом пункте изученные алгоритмы применяются для решения уравнений. Прежде всего следует добиться умения решать уравнения, включенные в упражнение **901**. Что касается уравнений, в которых ещё нужно выполнить разложение на множители, то в слабых классах следует ограничиться простейшими (некоторыми из упражнений **902—904**). С подготовленными учениками рекомендуем, кроме упражнений из раздела **А**, разобрать прежде всего упражнения **906**, **908**, **909** из раздела **Б**.

Вообще, следует иметь в виду, что это первое знакомство с решением уравнений с помощью разложения на множители. Более обстоятельно к этому вопрос мы вернёмся и в 8, и в 9 классах.

Комментарий к упражнениям

901. Образец рассуждений показан в примере 1.

д) $-2x(x-4) = 0,\ x = 0$ или $x - 4 = 0,\ x = 4.$

Ответ. 0; 4.

Далее используем приём разложения левой части уравнения на множители.

905. б) $x^2 - 10x + 25 = 0,\ (x-5)^2 = 0,\ x - 5 = 0,\ x = 5.$

Ответ. 5.

909. г) $25-(10-x)^2=0$, $(5-(10-x))(5+(10-x))=0$, $(x-5)(15-x))=0$.

Ответ. 5; 15.

910. г) $x^2-10x+16=0$, $x^2-10x+25-9=0$, $(x-5)^2-9=0$, $(x-5-3)(x-5+3)=0$, $(x-8)(x-2)=0$.

Ответ. 2; 8.

Типичная ошибка: учащиеся забывают представить 9 в виде 3^2 и получают ответ: 14 и 4. Рекомендуем выполнить проверку ответа подстановкой.

912. г) $25-(x-b)^2=0$, $(5-(x-b))(5+(x-b))=0$, $(5+b-x)(x+5-b)=0$.

Ответ. $b+5$, $b-5$.

8.7. Несколько более сложных примеров (*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

Этот пункт, безусловно, для сильных учащихся. В то же время для увлечённого математикой ученика, погрузившегося в тему «Разложение многочленов на множители», он и доступен, и полезен, и интересен.

Возможны разные стратегии работы с этим материалом. Можно, например, предложить кому-либо прочитать вводный текст и разобрать один из приведённых примеров; затем проверить понимание прочитанного, попросив воспроизвести разобранное преобразование. Такая работа весьма полезна и может быть в случае успешного ответа оценена на «5».

Можно предложить кому-либо из учащихся разобрать один из примеров и попытаться самостоятельно выполнить аналогичное задание из упражнений к пункту. Например, разобравшись с примером 1, можно с помощью таких рассуждений разложить на множители многочлен из упражнения **914**, *а*.

Комментарий к упражнениям

913. а) a^3-5a^2+9a-5 = $a^3-a-5a^2+10a-5$ = $a(a^2-1)-5(a^2-2a+1)$ = = $(a-1)(a(a+1)-5(a-1))$ = $(a-1)(a^2-4a+5)$.

б) $x^4+4x^2y^2-5y^4$ = $x^4+4x^2y^2+4y^4-4y^4-5y^4$ = $(x^2+2y^2)^2-9y^4$ = = $(x^2+2y^2+3y^2)(x^2+2y^2-3y^2)$ = $(x^2+5y^2)(x^2-y^2)$ =

= $(x-y)(x+y)(x^2+5y^2)$.

914. а) n^4+n^2+1 = $(n^4+2n^2+1)-n^2$ = $(n^2+1)^2-n^2$ =

= $(n^2+1-n)(n^2+1+n)$.

б) n^8+n^4+1 = $(n^8+2n^4+1)-n^4$ = $(n^4+1)^2-(n^2)^2$ =

= $(n^4+1-n^2)(n^4+1+n^2)$. Многочлен разложен на множители, и ответ может быть оставлен в таком виде. Но можно подсказать учащимся, что многочлен n^4+1+n^2 может быть разложен на множители: n^4+1+n^2 = = $n^4+2n^2+1-2n^2+n^2$ = $(n^2+1)^2-n^2$ = $(n^2+1-n)(n^2+1+n)$.

Ответ: $(n^4-n^2+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$.

915. Разложим левую часть на множители:

$$x^4+4x^2-5=(x^4+4x^2+4)-9=(x^2+2)^2-3^2=(x^2-1)(x^2+5)=$$
$$=(x-1)(x+1)(x^2+5).$$

Далее поступим аналогично тому, как это сделано в примере 3 в учебнике.

Ответ: –1; 1.

916. Способ 1.

$$a^5-b^5=(a^5-a^4b)+(ab^4-b^5)+(a^4b-ab^4)=$$
$$=a^4(a-b)+b^4(a-b)+ab(a^3-b^3)=$$
$$=(a-b)(a^4+b^4+ab(a^2+ab+b^2))=$$
$$=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

С п о с о б 2. Преобразуем правую часть равенства, перемножив многочлены и приведя подобные слагаемые.

Дополнительные задания

У к а з а н и я и р е ш е н и я

918. Каждое из выражений можно упростить, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые. Однако в учебнике предложено воспользоваться вынесением общего множителя за скобки. Полезно, чтобы учащиеся выполнили преобразования и тем, и другим способом.

919. Проблема в том, чтобы учащиеся сумели представить степень в виде произведения степеней с буквенными показателями. Поэтому перед выполнением этого упражнения полезно предложить подготовительные задания типа: представьте выражение 2^{n+1} в виде произведения степеней, в котором один из множителей равен 2^n; 2^{n-1}; 2^{n-2}.

923. Будут получены такие выражения:

б) $(3a^2+9ab)+(ab+3b^2)$;

в) $(a^2+a)+(2a+2)$;

д) $(c^2-4bc)-(5bc-20b^2)$;

е) $(n^2-n)+(3n-3)$.

924. б) $(abc+ab+ab(a+b))+(abc+bc+bc(b+c))+$

$+(abc+ac+ac(a+c)=ab(c+1+a+b)+bc(a+1+b+c)+$

$+ac(b+1+a+c) = (a+b+c+1)(ab+bc+ac)$.

928. в) $(2c+d-c-2d)(2c+d+c+2d)\cdot 3cd =$

$= (c-d)(3c+3d)\cdot 3cd = 3(c-d)(c+d)\cdot 3cd = 3(c^2-d^2)\cdot 3cd =$

$= 9c^3d-9cd^3$.

933. а) С п о с о б 1.

$x-z=x-y+y-z=(x-y)+(y-z)$.

Имеем:

$xy(x-y)-xz(x-z)+yz(y-z) =$

$= xy(x-y)-xz(x-y)-xz(y-z)+yz(y-z) =$

$= (x-y)(xy-xz)-(y-z)(xz-yz) =$

$= (x-y)(y-z)x-(y-z)(x-y)z =$

$= (x-y)(y-z)(x-z).$

Способ 2.

$xy(x-y)-xz(x-z)+yz(y-z) =$

$= x^2y-xy^2-x^2z+xz^2+yz(y-z) =$

$= x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+yz(y-z) =$

$= (y-z)(x^2-x(y+z)+yz) = (y-z)(x^2-xy-xz+yz) =$

$= (y-z)(x(x-z)-y(x-z)) = (y-z)(x-z)(x-y).$

Глава 9. Частота и вероятность (7 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	**Число уроков**	**Дидактические материалы**	**Рабочая тетрадь**
9.1. Случайные события	2		
9.2. Частота случайного события 9.3. Вероятность случайного события	4	О-46,О-47, «*Проверь себя*», П-66, П-67	251—255
Обзор и контроль	1		

Основная цель: показать возможность оценивания вероятности случайного события по его частоте.

Обзор главы. Эта небольшая по объёму глава чрезвычайно значима для формирования вероятностной культуры школьников. В ходе её изучения учащиеся получают общее представление о случайных событиях, учатся выделять невозможные и достоверные события. Они проводят случайные эксперименты, рассматривая их возможные исходы. У них формируются первичные представления о вероятности случайного события.

Логика изложения такова. На интуитивном уровне вероятность случайного события — это числовая мера его правдоподобия. Но как её установить? Жизненный опыт подсказывает, что событие тем вероятнее, чем чаще оно происходит, т. е. вероятность события должна быть каким-то образом связана с частотой его наступления при многократном проведении экспериментов.

В учебнике вводится понятие частоты случайного события и устанавливается её важное свойство: при многократном повторении одного и того же опыта частота стабилизируется и приближается к некоторому числу. Это число и считают вероятностью данного случайного события. Такой подход к определению понятия вероятности в математике называют статистическим. Далее выясняется, что вероятность случайного события — число, заключённое между 0 и 1; этому факту даётся геометрическое истолкование с помощью вероятностной школы.

В качестве необязательного материала в рубрике «*Для тех, кому интересно*» рассматривается правило сложения вероятностей, т. е. сделан некоторый шаг от качественного подхода к рассмотрению понятия к его математическому описанию.

Основные виды деятельности. Проводить эксперименты со случайными исходами, в том числе с помощью компьютерного моделирования, интерпретировать их результаты. Вычислять частоту случайного события; оценивать вероятность с помощью частоты, полученной опытным путём; прогнозировать частоту наступления события по его вероятности.

Приводить примеры случайных событий, в частности достоверных и невозможных событий, маловероятных событий. Приводить примеры равновероятных событий.

Комментарий к использованию ЭИ. Работа с ЭИ (раздел «Вероятность и статистика») позволяет в интерактивном режиме познакомить ученика с базовыми понятиями вероятностной линии: случайный эксперимент, исход эксперимента, случайное событие; дать представление о классических вероятностных моделях. Важным и обязательным результатом работы с этим разделом является овладение компьютерными средствами описания вероятностных моделей. В этом разделе ученикам активно прививается весьма важное умение «видеть одинаковое в разном и разное в одинаковом». Именно такой подход позволяет проиграть с помощью нескольких простейших вероятностных моделей самые разные ситуации с участием случая.

Кроме того, можно использовать ИУМК «Вероятность и статистика в школьном курсе математики», разделы 2.2—2.6.

9.1. Случайные события

Методический комментарий

Цель пункта — первичное введение школьников в мир вероятностей. В процессе рассмотрения реальных ситуаций вводятся базовые термины теории вероятностей: случайное событие, невозможное и достоверное событие, равновозможные или равновероятные события, противоположные события. Новые термины связываются с известными из повседневной жизни словами — часто, редко, всегда, никогда и др., определяющими частоту наступления события. Школьники учатся оценивать на качественном уровне вероятность наступления несложного случайного события, используя свой жизненный опыт и опираясь на здравый смысл. При этом используются такие оценки: маловероятно, очень вероятно, невероятно и пр.

Вероятность наступления некоторых событий изменяется в зависимости от условий, в которых они рассматриваются. Это справедливо прежде всего в тех случаях, когда наступление события связано с конкретной личностью. Поэтому при обсуждении в классе на один и тот же вопрос может быть дано несколько разных и одновременно верных ответов. Так, при обсуждении вероятности наступления события «я не сделаю ни одной ошибки в контрольной работе» ученики в зависимости от личной ситуации могут дать ответы: «Это достоверное событие», «Это невозможное событие», «Это очень возможное событие», «Это маловероятное событие» и др. При решении качественных вероятностных задач самым важным является приводимая аргументация. Если аргументация вполне логична и разумна, то ответ следует считать верным.

Комментарий к упражнениям

938. Достоверными можно признать события д) и е). Невозможным можно признать событие ж), и то только в том случае, если это утверждение понимать как «следующий день после пятницы».

940. Белые поля занимают большую площадь, чем цветные, поэтому более вероятно, что стрелка остановится на белом поле, что означает, что ребята скорее всего пойдут на стадион.

955. В первом случае нужно выбрать 3 цифры из десяти, которые следует нажать, а во втором тоже 3 цифры, которые нажимать не надо. Поэтому шансы равны.

9.2. Частота случайного события

Методический комментарий

Особенностью методики изложения материала в учебнике является частотный подход к понятию вероятности. Это требует, естественно, достаточного обстоятельного знакомства с понятием частоты, изучения как готового статистического материала (он помещён в объяснительном тексте учебника), так и полученного самостоятельно (бросание монеты, кубика, кнопки и т. д.). Реальные факты и наблюдения за стабилизацией частот играют чрезвычайно важную роль в развитии вероятностного мышления и интуиции. Таким образом, требуется реальное проведение опытов в ходе учебного процесса. Так как для стабилизации частоты необходимо большое число экспериментов, рекомендуется работа в малых группах. Каждый ученик проводит свой эксперимент, затем объединяются результаты членов каждой группы, затем объединяются результаты всех групп. Результаты проведённых экспериментов фиксируются в специальных таблицах.

Процесс стабилизации частоты полезно иллюстрировать с помощью графиков.

Комментарий к упражнениям

963—964. При проведении экспериментов со случайными исходами предполагается работа в малых группах (по 2, 3 или 4 человека).

965. а) Обозначим через x примерное число школьников, сдававших экзамен. Отношение $\frac{100}{x}$ — это относительная частота появления неудовлетворительной оценки, т. е. $\frac{100}{x} = 0{,}07$, $x = 1430$.

б) Сдали экзамен примерно 1330 человек.

967. «Зайцы» составляют 10% всех пассажиров электропоездов, значит 5400 человек, купивших билеты, — это 90% всех пассажиров. Пусть x — число «зайцев». Имеем пропорцию:

$$x — 10\%$$
$$5400 — 90\%$$

Ответ. Примерно 600 «зайцев».

9.3. Вероятность случайного события

Методический комментарий

Учащиеся могут оценивать вероятности случайных событий, используя статистические данные, полученные ими в результате проведённых экспериментов. Они должны осознать, что вероятность случайного события всегда заключена между 0 и 1. Этому факту даётся геометрическое истолкование с помощью вероятностной шкалы. Следует обратить внимание на то, что вероятности достоверного и невозможного события равны 1 и 0 соответственно.

Результатом изучения данного материала должно явиться умение ответить на следующие вопросы:

1) Как частота события связана с его вероятностью? (Подчёркивается, что частота приближается к вероятности при увеличении числа экспериментов.)

2) Зачем нужно знать вероятность события? (Ответ — возможность прогнозирования его наступления.)

Кроме того, учащиеся должны знать, что на практике основным способом определения вероятности события является частотный подход.

Комментарий к упражнениям

970. На каждые 1000 лампочек приходится 997 исправных. Значит, искомая вероятность равна 0,997, т. е. 99,7%.

973. Примерно в 120 случаях.

974. Нельзя.

975. Нет. Для оценки вероятности необходимо провести большое число экспериментов.

976. Достоверное событие происходит обязательно. Значит, событие *A* достоверным считать нельзя. Его можно назвать очень вероятным, практически достоверным.

981. Обозначим через *x* примерное количество рыб в пруду. Вероятность выловить помеченную рыбу равна $\frac{90}{x}$. Так как из 84 выловленных рыб 5 оказались помеченными, отношение $\frac{5}{84}$ можно считать примерно равным $\frac{90}{x}$. Из пропорции $\frac{90}{x} = \frac{5}{84}$ получаем, что рыб в пруду около 1500.

9.4. Сложение вероятностей

(*Для тех, кому интересно*)

Методический комментарий

На простых, близких опыту учащихся примерах вводится понятие несовместных событий и рассматривается операция сложения их вероятностей. Тем самым делается некоторый шаг в сторону алгебраического метода изучения вероятностей.

Комментарий к упражнениям

982. а), б), в) События совместимы.

г) События несовместимы.

983. Рассмотрим следующие несовместимые события:

A: человек выиграл 100 000 р.;

B: человек выиграл 10 000 р.;

C: человек выиграл 1000 р.;

D: человек выиграл 100 р.;

E: человек выиграл 50 р.

Найдём вероятность этих событий: $P(A) = 0{,}00001$; $P(B) = 0{,}0001$; $P(C) = 0{,}001$; $P(D) = 0{,}01$; $P(E) = 0{,}05$.

а) Вероятность того, что человек выиграет не менее 1000 р., равна

$$P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}00111.$$

б) Вероятность того, что он выиграет, равна

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 0{,}06111.$$

в) Вероятность того, что он проиграет, равна

$$1 – 0{,}06111 = 0{,}93889.$$

Дополнительные задания

Указания и решения

984. 2) Чётное число очков выпало 48 раз, т.е. относительная частота события A равна 48%; нечётное число очков выпало 52 раза, т. е. относительная частота события B равна 52%; число очков, большее трёх, выпадало 54 раза, т. е. относительная частота события C составляет 54%.

986. Событие A.

987. Нулю равна вероятность событий A и D (минимальная сумма очков, выпавших на двух кубиках, равна 2, а максимальное произведение равно 36). События B и C — достоверные. Можно записать: $P(A) = 0$, $P(B) = 1$, $P(C) = 1$, $P(D) = 0$.

988. Если в классе учится 25 человек, то каждое из указанных событий — достоверное, значит, и в случае «а», и в случае «б» вероятность равна 1.

Почему, например, событие «хотя бы двое родились в одном месяце» является достоверным? Пусть в «худшем случае» первые двенадцать учеников класса по списку родились в разные месяцы, но тогда месяц рождения тринадцатого неизбежно совпадёт с месяцем одного из них.

989. Чтобы с достоверностью купить хотя бы один выигрышный билет, достаточно приобрести 901 билет. В самом деле, среди 1000 лотерейных билетов «плохих» всего 1000 – 100 = 900.

Содержание

<u>Глава 9. Частота и вероятность</u>

Учебное издание

Суворова Светлана Борисовна

Бунимович Евгений Абрамович

Кузнецова Людмила Викторовна

Минаева Светлана Станиславовна

Рослова Лариса Олеговна

Алгебра

Методические рекомендации

7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования

Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редактор *Л. В. Кузнецова*

Младший редактор *Е. А. Андреенкова*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Художник *О. П. Богомолова*

Компьютерная графика *К. В. Кергелен*

Корректор *И. В. Чернова*